ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΥΨΗΛΩΝ ΕΝΕΡΓΕΙΩΝ

Μελέτη Κλασματικών Ολοκληρωτικών Μετασχηματισμών

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Σωκράτη Κ. Μπούσιου

Επιβλέπων: Θεόδωρος Αλεξόπουλος
Καθηγητής

Αθήνα, Οκτώβριος 2009

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΥΨΗΛΩΝ ΕΝΕΡΓΕΙΩΝ

Μελέτη Κλασματικών Ολοκληρωτικών Μετασχηματισμών

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Σωκράτη Κ. Μπούσιου

Επιβλέπων: Θεόδωρος Αλεξόπουλος
Καθηγητής

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 26/10/'09.

....	....	....
Θ. Αλεξόπουλος	Ε. Γαζής	Γ. Τσιπολίτης
Καθηγητής	Καθηγητής	Αν. Καθηγητής

Αθήνα, Οκτώβριος 2009.

....
(Σωκράτης Κ. Μπούσιος)
(Φυσικός Εφαρμογών)

Εισαγωγή

Η έννοια του τελεστή είναι από τις σημαντικότερες έννοιες στα μαθηματικά και στη σύγχρονη φυσική. Μεγάλο πλήθος προβλημάτων της σύγχρονης φυσικής αντιμετωπίζεται με τους τελεστές. Στα μαθηματικά, όπου πάντα ορίζουμε τις έννοιες πιο γενικά και αφηρημένα, έχουμε ορίσει τον τελεστή ως την απεικόνιση ενός χώρου σε έναν άλλο. Στην πράξη λίγες κατηγορίες τελεστών είναι αυτές που μας χρησιμεύουν. Η βασικότερη κατηγορία είναι οι γραμμικοί και φραγμένοι τελεστές. Με αυτούς θα ασχοληθούμε και εμείς σε αυτήν την εργασία.

Αυτό που θα κάνουμε είναι να γενικεύσουμε κάποιους γραμμικούς τελεστές. Το τι σημαίνει γενίκευση θα φανεί γρήγορα, όπως επίσης γρήγορα θα φανεί και η πολυπλοκότητα τον εκφράσεων που παράγονται. Θα αναλύσουμε αρκετούς τελεστές, μερικοί εκ των οποίων είναι πολύ διάσημοι και χρησιμοποιούνται κατά κόρον στην επιστήμη της ανάλυσης σήματος και της οπτικής. Για παράδειγμα θα εξάγουμε την γενική έκφραση για τον τελεστή Fourier ή μετασχηματισμό Fourier όπως συνήθως λέγεται, όπως και την γενική έκφραση του μετασχηματισμού Hartley.

Ένα πεδίο που ασχολείται με γενικεύσεις εννοιών ονομάζεται κλασματική ανάλυση. Ο λόγος που ονομάζεται έτσι είναι, διότι έννοιες που φαινομενικά δεν μπορούνε να ισχύσουν παρά μόνο για ακέραιες καταστάσεις, κλασματοποιούνται. Ένα παράδειγμα που ίσως φανεί αστείο είναι το παράδειγμα με την έγκυο γυναίκα. Μια γυναίκα μπορεί να είναι έγκυος ή να μην είναι. Πρόκειται για δύο καταστάσεις που θα μπορούσαμε να τις χαρακτηρίσουμε ακέραιες. Η κλασματική ανάλυση θα προσπαθούσε να παράξει την έννοια της ολίγον έγκυο γυναίκας. Σε πρώτη φάση ακούγεται μη λογικό, αλλά θα δούμε πως τελικά, περισσότερα πράγματα είναι δυνατά απ'οσο νομίζουμε.

Η κλασματική ανάλυση αν και υπάρχει από αρκετά παλιά, δεν έχει διαδοθεί αρκετά και πολύ επιστήμονες και μαθηματικοί την αγνοούν. Ένα από τα πρώτα σημαντικά βήματα στον τομέα έγιναν από τον Lagrange, όταν έδωσε έναν ορισμό για την κλασματική παράγωγο. Δηλαδή μίλησε ουσιαστικά για κλασματικό ρυθμό μεταβολής, πράγμα που τότε, πέρα από μαθηματική αφηρημένη έννοια δεν ήταν τίποτε άλλο. Σήμερα έχουμε αρκετές εφαρμογές και σιγά σιγά το πεδίο αυτό κερδίζει χώρο. Πλέον μιλάμε για κλασματικές διαστάσεις, που απεικονίζονται με τα λεγόμενα Fractal και έχουν εφαρμογή στην θεωρία του χάους, ακόμα και για κλασματικούς πίνακες, που είναι αντικείμενα με παράξενη μορφή (να σημειώσουμε ότι μεταξύ πινάκων και τελεστών υπάρχει αμφιμονοσήμαντη σύνδεση).

Η εργασία χωρίζεται σε επτά κεφάλαια. Στο πρώτο δίνουμε γενικά μια ιδέα του αντικειμένου. Στα επόμενα τρία γενικεύουμε τους τελεστές Fourier,Hartley,cosineFourier και sineFourier. Στο πέμπτο κεφάλαιο αναλύουμε ότι και παραπάνω για χώρους πολλών διαστάσεων. Στη συνέχεια δίνουμε ένα κεφάλαιο με τον γενικευμένο τελεστή της παραγώγου, ο οποίος είναι και ο βασικότερος της κλασματικής ανάλυσης. Κλείνοντας δίνουμε κάποιες συμπληρώσεις που ίσως θα ήταν υπερβολή να τις συμπεριλάβουμε στα αντίστοιχα κεφάλαια που ανήκουν.

Έγινε προσπάθεια να παρουσιαστεί η συνολική ύλη, αναλυτικά και με πολλές αποδείξεις. Αυτό έγινε διότι θέλαμε να διατηρήσουμε ένα κλήμα συνέπειας και ταυτόχρονα ευκολίας ως προς την παρακολούθηση της ροής της ύλης. Ελπίζω η ανάγνωση να είναι ευχάριστη και για όσους δεν γνωρίζουν το αντικείμενο των κλασματικών μετασχηματισμών, εύχομαι να το αγαπήσουν.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Γενίκευση γραμμικών τελεστών

Θα ξεκινήσουμε δίνοντας την κεντρική ιδέα στο πως γενικεύεται ή κλασματοποιείται ένας γραμμικώς τελεστής. Έστω ότι έχουμε ένα γραμμικό τελεστή $\mathcal{R}$. Η δράση του σε μια συνάρτηση ορίζεται ως:

$$\mathcal{R}\left[f(x)\right] = F(x)$$

,όπου F μια άλλη συνάρτηση.
Ένας τελεστής μας πάει από ένα χώρο σε έναν άλλο και αυτός μπορεί να είναι και διαφορετικής διάστασης από τον πρώτο. Όπως για παράδειγμα ο τετραδικός τελεστής Fourier. Πολλές φορές χρησιμοποιούμε διαφορετική μεταβλητή στον καινούργιο χώρο και αυτό γίνεται για να αποφεύγουμε συγχύσεις, αλλά κυρίως διότι συνήθως οι δύο χώροι έχουν διαφορετική φυσική σημασία. Ένα ερώτημα είναι αν έχει νόημα να μιλήσουμε για δράση ενός τελεστή κατά το ήμισι, δηλαδή έναν τελεστή που δρα μισή φορά σε μια συνάρτηση. Το αμέσως επόμενο ερώτημα που γεννάται είναι, τι είδους συνάρτηση παράγει ο συγκεκριμένος τελεστής.
Σε αυτά τα δύο ερωτήματα στηρίζεται η γενίκευση ή αλλιώς κλασματοποίηση ενός γραμμικού τελεστή. Συγκεκριμένα αν δράσει ένας τελεστής κατά μισή φορά παράγει μια συνάρτηση, που άμα ξαναδράσει αυτός στη συνάρτηση που παράχθηκε να δημιουργείται μια τέτοια συνάρτηση, που θα είναι ίδια με εκείνη, που θα είχε παραχθεί με την δράση του κλασσικού ακέραιου τελεστή πάνω στην αρχική, δηλαδή:

$$\mathcal{R}^{\frac{1}{2}}\left[\mathcal{R}^{\frac{1}{2}}\left[f(x)\right]\right] = \mathcal{R}\left[f(x)\right] = F(x)$$

Κρατώντας αυτήν την ιδέα ορίζουμε τον γενικό τελεστή $\mathcal{R}^a$ έτσι ώστε:

- $\mathcal{R}^0\left[f(x)\right] = f(x)$
- $\mathcal{R}^1\left[f(x)\right] = F(x)$
- $\mathcal{R}^a\left[\mathcal{R}^b\left[f(x)\right]\right] = \mathcal{R}^b\left[\mathcal{R}^a\left[f(x)\right]\right]$
- $\mathcal{R}^a\left[\mathcal{R}^b\left[f(x)\right]\right] = \mathcal{R}^{a+b}\left[f(x)\right] \qquad \forall \quad a, b \in \mathbb{R}$

Να πούμε πως η τρίτη απαίτηση συνεπάγεται από την τέταρτη, καθώς ισχύει η αντιμεταθετικότητα στην πρόσθεση πραγματικών αριθμών. Παρ'ολα αυτά θα την αποδεικνύουμε και αυτήν για να αφήνουμε το ενδεχόμενο για δομές που δεν ισχύει η αντιμεταθετικότητα. Η δυσκολία τώρα είναι, για κάθε τελεστή να βρίσκουμε την έκφραση για την γενική μορφή του. Κυρίως θα ασχοληθούμε με τους τελεστές που παρουσιάζονται στην ανάλυση σήματος, όπως ο Fourier, Hartley, cosine Fourier και sine Fourier. Θα δούμε και μία μαθηματική εφαρμογή σε σχέσει με τον γενικευμένο Fourier. Επίσης θα εξετάσουμε όλους αυτούς τους τελεστές για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Πρώτα όμως θα πάρουμε μια γεύση από τον γενικευμένο τελεστή της παραγώγου και θα εξετάσουμε μια μέθοδο να για την εύρεση της έκφρασης ενός γενικευμένου τελεστή.

1.1 Τελεστής της παραγώγου για εκθετικές και πολυωνυμικές συναρτήσεις

Δεν έχουμε ακόμα τα κατάλληλα εργαλεία για να δώσουμε την τελική γενικευμένη έκφραση για τον συγκεκριμένο τελεστή, διότι χρειαζόμαστε κάποιες ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier οι οποίες θα ειπωθούν παρακάτω.

Έτσι για λόγους συνέπειας η πλήρης ανάπτυξη θα γίνει παρακάτω. Άλλωστε ο σκοπός μας εδώ είναι να δώσουμε μια ιδέα για την έννοια των γενικευμένων τελεστών. Θα δούμε τις περιπτώσεις των εκθετικών και των πολυωνυμικών συναρτήσεων και θα εξάγουμε ειδικές εκφράσεις για την γενίκευση του τελεστή της παραγώγου.

1.1.1 Εκθετικές συναρτήσεις

Έστω ότι $f(x) = \mathrm{e}^{cx}$, όπου $c \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x)\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\mathrm{e}^{cx}\right] = c\mathrm{e}^{cx}$$

Άν θεωρήσουμε την δράση του γενικευμένου τελεστή ως:

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}x^{\alpha}}\left[\mathrm{e}^{cx}\right] = c^{\alpha}\mathrm{e}^{cx}$$

,θα ισχύουν:

$$\frac{\mathrm{d}^{0}}{\mathrm{d}x^{0}}\left[f(x)\right] = \frac{\mathrm{d}^{0}}{\mathrm{d}x^{0}}\left[\mathrm{e}^{cx}\right] = c^{0}\mathrm{e}^{cx} = \mathrm{e}^{cx} = f(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}^{1}}{\mathrm{d}x^{1}}\left[f(x)\right] = \frac{\mathrm{d}^{1}}{\mathrm{d}x^{1}}\left[\mathrm{e}^{cx}\right] = c^{1}\mathrm{e}^{cx} = c\mathrm{e}^{cx} = f'(x) = F(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}x^{\alpha}}\left[\frac{\mathrm{d}^{\beta}}{\mathrm{d}x^{\beta}}\left[f(x)\right]\right] = \frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}x^{\alpha}}\left[\frac{\mathrm{d}^{\beta}}{\mathrm{d}x^{\beta}}\left[\mathrm{e}^{cx}\right]\right] = \frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}x^{\alpha}}\left[c^{\beta}\mathrm{e}^{cx}\right] = c^{\beta}\frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}x^{\alpha}}\left[\mathrm{e}^{cx}\right] =$$

$$= c^{\beta}c^{\alpha}\mathrm{e}^{cx} = c^{\alpha}c^{\beta}\mathrm{e}^{cx} = c^{\alpha}\frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}x^{\alpha}}\left[\mathrm{e}^{cx}\right] = \frac{\mathrm{d}^{\beta}}{\mathrm{d}x^{\beta}}\left[\frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}x^{\alpha}}\left[\mathrm{e}^{cx}\right]\right] = \frac{\mathrm{d}^{\beta}}{\mathrm{d}x^{\beta}}\left[\frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}x^{\alpha}}\left[f(x)\right]\right]$$

και:

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}x^{\alpha}}\left[\frac{\mathrm{d}^{\beta}}{\mathrm{d}x^{\beta}}\left[f(x)\right]\right] = \frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}x^{\alpha}}\left[\frac{\mathrm{d}^{\beta}}{\mathrm{d}x^{\beta}}\left[\mathrm{e}^{cx}\right]\right] = c^{\alpha}c^{\beta}\mathrm{e}^{cx} = c^{\alpha+\beta}\mathrm{e}^{cx} = \frac{\mathrm{d}^{\alpha+\beta}}{\mathrm{d}x^{\alpha+\beta}}\left[\mathrm{e}^{cx}\right] = \frac{\mathrm{d}^{(\alpha+\beta)}}{\mathrm{d}x^{(\alpha+\beta)}}\left[f(x)\right]$$

Έτσι έχουμε βρει την έκφραση της γενικευμένης παραγώγου για εκθετικές συναρτήσεις.

Παραδείγματα:

1. Για $\alpha = 1/3$ και $c = 5$ έχουμε:

$$\frac{\mathrm{d}^{\frac{1}{3}}}{\mathrm{d}x^{\frac{1}{3}}}\left[\mathrm{e}^{5x}\right] = 5^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{5x} = \sqrt[3]{5}\mathrm{e}^{5x}$$

2. Για $\alpha = 1/2$ και $c = -1$ έχουμε:

$$\frac{\mathrm{d}^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{d}x^{\frac{1}{2}}}\left[\mathrm{e}^{-x}\right] = (-1)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{5x} = \sqrt{-1}\mathrm{e}^{-x} = j\mathrm{e}^{-x}$$

Και βέβαια αν δράσει αυτός ο τελεστής άλλη μία φορά θα έχουμε:

$$\frac{\mathrm{d}^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{d}x^{\frac{1}{2}}}\left[j\mathrm{e}^{-x}\right] = j\frac{\mathrm{d}^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{d}x^{\frac{1}{2}}}\left[\mathrm{e}^{-x}\right] = j \cdot j\mathrm{e}^{-x} = -\mathrm{e}^{-x}$$

3. Για $\alpha = 1/2$ και $c = -1$ έχουμε:

$$\frac{\mathrm{d}^{-1}}{\mathrm{d}x^{-1}}\left[\mathrm{e}^{2x}\right] = 2^{-1}\mathrm{e}^{2x} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$$

Γενικότερα για $c \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\frac{\mathrm{d}^{-1}}{\mathrm{d}x^{-1}}\left[\mathrm{e}^{cx}\right] = c^{-1}\mathrm{e}^{cx} = \frac{1}{c}\mathrm{e}^{cx}$$

,αλλά:

$$\int_0^x \mathrm{e}^{cx'}\mathrm{d}x' = \frac{1}{c}\mathrm{e}^{cx}$$

Δηλαδή για εκθετικές συναρτήσεις ισχύει:

$$\int_0^x * \,\mathrm{d}x' = \frac{\mathrm{d}^{-1}}{\mathrm{d}x^{-1}}$$

Σε αυτό το σημείο θα αναρωτιόταν κάποιος μήπως το ολοκλήρωμα είναι απλώς ένα κομμάτι της γενίκευσης του τελεστή της παραγώγου. Δεν θα αναφέρουμε εδώ τίποτα άλλο, θα ξεδιαλύνουν όλα παρακάτω.

1.1.2 Πολυωνυμικές συναρτήσεις

Πριν δώσουμε την έκφραση του γενικευμένου τελεστή παραγώγισης για πολυωνυμικές συναρτήσεις να πούμε δυο λόγια για την συνάρτηση γάμμα. Η συνάρτηση γάμμα $\Gamma(x)$ ορίζεται ως εξής:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

,ή ισοδύναμα:

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \left[ln\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{x-1}\mathrm{d}t$$

Ο δεύτερος τύπος αν και ανακαλύφτηκε πριν από τον πρώτο (Από τον Euler κατά την προσπάθεια του να λύσει ένα μηχανικό πρόβλημα.), είναι πιο δύσχρηστος και δεν χρησιμοποιείται συχνά. Η συνάρτηση γάμμα έχει πάρα πολλές ιδιότητες. Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε δύο, από τις οποίες εξάγεται ο ορισμός για την γενίκευση του παραγοντικού.

- $\Gamma(n+1) = n! \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$
- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \forall \quad x \in \mathbb{R}$

Απόδειξη 1:

Θα δείξουμε πρώτα ότι:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^n = n!$$

,για κάποιο $k \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\int_0^k \mathrm{e}^{-t}t^n\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}(t^n + nt^{n-1} + n(n-1)t^{n-2} + ... + n!)\right]_0^k =$$

$$= -\frac{k^n + nk^{n-1} + n(n-1)k^{n-2} + ... + n!}{\mathrm{e}^k} + \frac{n!}{\mathrm{e}^0}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{k\to+\infty}\int_0^k \mathrm{e}^{-t}t^n\mathrm{d}t = \lim_{k\to+\infty} -\frac{k^n + nk^{n-1} + n(n-1)k^{n-2} + ... + n!}{\mathrm{e}^k} + \frac{n!}{\mathrm{e}^0} = n!$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^n = n!$$

και άρα:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{n-1} = (n-1)! \quad \Rightarrow \quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma(n+1) = n!$$

<u>Απόδειξη 2:</u>

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^{x+1-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^x\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} t^x(\mathrm{e}^{-t})'\mathrm{d}t \\ &= \left[-t^x\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \lim_{k\to\infty}\left(-k^x\mathrm{e}^{-k}\right) + 0 + x\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Με φόντο τους δύο αυτούς τύπους ορίζουμε το παραγοντικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$x! = \Gamma(x+1)$$

Έστω τώρα ότι έχουμε το πολυώνυμο $f(x) = x^n$ με $n \in \mathbb{N}$ και $x \in \mathbb{R}$, τότε $\forall\, m \in \mathbb{N} \leq n$ ισχύει:

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}[x^n] = \frac{n!}{(n-m)!}x^{n-m}$$

<u>Απόδειξη:</u>

Για $m = 1$ έχουμε:

$$\frac{\mathrm{d}^1}{\mathrm{d}x^1}[x^n] = \frac{n!}{(n-1)!}x^{n-1} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!}x^{n-1} = nx^{n-1}$$

Το οποίο ισχύει. Αν τώρα όταν ισχύει για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ συνεπάγεται ότι ισχύει και για $k+1$, τότε σύμφωνα με την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής ισχύει $\forall\, m \in \mathbb{N}$. (Βέβαια πάντα $m \leq n$.) Πράγματι:

$$\frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}x^{k+1}}[x^n] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}[x^n]\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}\right] = \frac{n!}{(n-k)!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{n-k}\right] = \frac{n!}{(n-k)!}(n-k)x^{n-k-1}$$

$$= \frac{n!(n-k)}{(n-k)(n-k-1)!}x^{n-k-1} = \frac{n!}{[(n-(k+1)]!}x^{n-(k+1)}$$

Τώρα έχουμε όλα τα εφόδια για να δώσουμε την έκφραση του γενικευμένου τελεστή για πολυωνυμικές συναρτήσεις. Μάλιστα δεν θα σταματήσουμε εδώ και θα επεκτείνουμε την γενίκευση σε ”πολυώνυμα” που οι δυνάμεις της μεταβλητής είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

Έστω $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Άν θεωρήσουμε την δράση του γενικευμένου τελεστή ως:

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}x^{\alpha}}\left[x^{\gamma}\right] = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}x^{\gamma-\alpha}$$

,θα ισχύουν:

$$\frac{\mathrm{d}^{0}}{\mathrm{d}x^{0}}\left[x^{\gamma}\right] = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-0+1)}x^{\gamma-0} = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1)}x^{\gamma} = x^{\gamma}$$

$$\frac{\mathrm{d}^{1}}{\mathrm{d}x^{1}}\left[x^{\gamma}\right] = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-1+1)}x^{\gamma-1} = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma)}x^{\gamma-1} = \frac{\gamma\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma)}x^{\gamma-1} = \gamma x^{\gamma-1}$$

,επίσης:

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}x^{\alpha}}\left[\frac{\mathrm{d}^{\beta}}{\mathrm{d}x^{\beta}}\left[x^{\gamma}\right]\right] = \frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}x^{\alpha}}\left[\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\beta+1)}x^{\gamma-\beta}\right] =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\beta+1)}\frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}x^{\alpha}}\left[x^{\gamma-\beta}\right] = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\beta+1)}\frac{\Gamma(\gamma-\beta+1)}{\Gamma(\gamma-\beta-\alpha+1)}x^{\gamma-\beta-\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}x^{\alpha}}\left[\frac{\mathrm{d}^{\beta}}{\mathrm{d}x^{\beta}}\left[x^{\gamma}\right]\right] = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-(\beta+\alpha)+1)}x^{\gamma-(\beta+\alpha)}$$

και:

$$\frac{\mathrm{d}^{\beta}}{\mathrm{d}x^{\beta}}\left[\frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}x^{\alpha}}\left[x^{\gamma}\right]\right] = \frac{\mathrm{d}^{\beta}}{\mathrm{d}x^{\beta}}\left[\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}x^{\gamma-\alpha}\right] =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}\frac{\mathrm{d}^{\beta}}{\mathrm{d}x^{\beta}}\left[x^{\gamma-\alpha}\right] = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}\frac{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}{\Gamma(\gamma-\beta-\alpha+1)}x^{\gamma-\beta-\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^{\beta}}{\mathrm{d}x^{\beta}}\left[\frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}x^{\alpha}}\left[x^{\gamma}\right]\right] = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-(\beta+\alpha)+1)}x^{\gamma-(\beta+\alpha)}$$

,έτσι:

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}x^{\alpha}}\left[\frac{\mathrm{d}^{\beta}}{\mathrm{d}x^{\beta}}\left[x^{\gamma}\right]\right] = \frac{\mathrm{d}^{\beta}}{\mathrm{d}x^{\beta}}\left[\frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}x^{\alpha}}\left[x^{\gamma}\right]\right]$$

και τέλος:

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha+\beta}}{\mathrm{d}x^{\alpha+\beta}}\left[x^{\gamma}\right] = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-(\beta+\alpha)+1)}x^{\gamma-(\beta+\alpha)} = \frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}x^{\alpha}}\left[\frac{\mathrm{d}^{\beta}}{\mathrm{d}x^{\beta}}\left[x^{\gamma}\right]\right]$$

Έτσι έχουμε βρει την έκφραση του γενικευμένου τελεστή παραγώγισης για πολυώνυμα και ταυτόχρονα για συναρτήσεις που για δυνάμεις του x έχουν οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό.

Παραδείγματα:

1. Για $\alpha = 1/2$ και $\gamma = 2$ έχουμε:

$$\frac{\mathrm{d}^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{d}x^{\frac{1}{2}}}\left[x^2\right] = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2-\frac{1}{2}+1)}x^{2-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(\frac{3}{2}+1)}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2\Gamma(2)}{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})}x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}x^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{4}{3}\frac{1\Gamma(1)}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}x^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}\frac{1}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}}$$

,παρατηρούμε ότι:

$$\frac{\mathrm{d}^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{d}x^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{8}{3\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{8}{3\sqrt{\pi}}\frac{\mathrm{d}^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{d}x^{\frac{1}{2}}}\left[x^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{8}{3\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\frac{3}{2}+1)}{\Gamma(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+1)}x^{\frac{3}{2}-1\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{8}{3\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\frac{3}{2}+1)}{\Gamma(1+1)}x^1 = \frac{8}{3\sqrt{\pi}}\frac{3\sqrt{\pi}}{4}x = 2x$$

2. Για $\alpha = -1$ και $\gamma = 2$ έχουμε:

$$\frac{\mathrm{d}^{-1}}{\mathrm{d}x^{-1}}\left[x^2\right] = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2-(-1)+1)}x^{2-(-1)} = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(3+1)}x^3 = \frac{2!}{3!}x^3 = \frac{2}{6}x^3 = \frac{x^3}{3}$$

Εδώ ίσος αναρωτηθούμε πάλι για τον τελεστή της παραγώγου, ότι αν αυτός υψωμένος στη δύναμη του -1 είναι ισοδύναμος με το αόριστο ολοκλήρωμα, όταν αυτό έχει σταθερά μηδέν. Μπορώ να σας πω από τώρα ότι αυτό ισχύει, αλλά η απόδειξη θα δοθεί στο έκτο κεφάλαιο.

1.2 Μέθοδος γενίκευσης τελεστών

Θα δείξουμε μία μέθοδο με την οποία μπορούμε να βρούμε την γενική έκφραση κάποιου τελεστή. Όπως πάντα αυτά που θα εξάγουμε θα ισχύουν για γραμμικούς τελεστές.
Έστω ένας τελεστής $\mathcal{R}$ που με την δράση του μας πάει σε έναν άλλο χώρο μίας διάστασης. Έστω επίσης ότι ο $\mathcal{R}$ έχει ιδιοσυναρτήσεις $e_n(x)$ με ιδιοτιμές $\lambda_n \in \mathbb{C}$ και $n \in \mathbb{N}$, τότε ισχύει:

$$\mathcal{R}\left[e_n(x)\right] = \lambda_n e_n(\omega)$$

,όπου ω η μεταβλητή του άλλου χώρου. Αν τώρα κάνουμε και την υπόθεση πως οι ιδιοσυναρτήσεις του $\mathcal{R}$ αποτελούν πλήρες σύστημα στο διάστημα που ορίζονται, τότε μια τμηματικά συνεχής συνάρτηση $f(x)$ αναλύεται ως:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n e_n(x)$$

,όπου οι συντελεστές είναι:

$$b_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e_n^*(x)\mathrm{d}x$$

,με $e_n^*(x)$ εννοούμε την συζυγή παράσταση της συνάρτησης $e_n(x)$. Με την δράση τώρα του $\mathcal{R}$ έχουμε:

$$\mathcal{R}\left[f(x)\right] = \mathcal{R}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} b_n e_n(x)\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \mathcal{R}\left[e_n(x)\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \lambda_n e_n(\omega)$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{R}\left[f(x)\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \lambda_n e_n(\omega)$$

Θα θεωρήσουμε ως αντίστοιχο γενικευμένο τελεστή:

$$\mathcal{R}^{\alpha}\left[f(x)\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \lambda_n^{\alpha} e_n(\omega)$$

,αντικαθιστώντας τα b_n, παίρνουμε ως:

$$\mathcal{R}^{\alpha}\left[f(x)\right] = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e_n^*(x)\mathrm{d}x\right]\lambda_n^{\alpha}e_n(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda_n^{\alpha}e_n^*(x)e_n(\omega)\right]f(x)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{R}^{\alpha}\left[f(x)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda_n^{\alpha}e_n^*(x)e_n(\omega)\right]f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} K_{\alpha}(x,\omega)f(x)\mathrm{d}x$$

,όπου:

$$K_{\alpha}(x,\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty}\lambda_n^{\alpha}e_n^*(x)e_n(\omega)$$

Η συνάρτηση K είναι ουσιαστικά μια συνάρτηση τριών μεταβλητών (x,ω,α) και ονομάζεται πυρήνας του αντίστοιχου τελεστή ή πυρήνας του μετασχηματισμού. Μένει τώρα να δείξουμε αν η παραπάνω θεωρημένη έκφραση ικανοποιεί τις τέσσερις ιδιότητες που πρέπει να ικανοποιεί κάθε γενικευμένος τελεστής.
Πράγματι για $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^{0}\left[f(x)\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} K_0(x,\omega)f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda_n^{0}e_n^*(x)e_n(\omega)\right]f(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e_n^*(x)\mathrm{d}x\right]e_n(\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n e_n(\omega) = f(\omega)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^{1}\left[f(x)\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} K_1(x,\omega)f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda_n^{1}e_n^*(x)e_n(\omega)\right]f(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\lambda_n\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e_n^*(x)\mathrm{d}x\right]e_n(\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty}\lambda_n b_n e_n(\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\lambda_n e_n(\omega) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\mathcal{R}\left[e_n(x)\right] = \mathcal{R}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} b_n e_n(x)\right] = \mathcal{R}\left[f(x)\right] = F(\omega)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{R}^{\alpha}\left[\mathcal{R}^{\beta}\left[f(x)\right]\right] = \mathcal{R}^{\alpha}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\lambda_n^{\beta}e_n(x)\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\lambda_n^{\beta}\left[\mathcal{R}^{\alpha}\left[e_n(\omega_1)\right]\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\lambda_n^{\beta}\lambda_n^{\alpha}e_n(\omega)$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{R}^{\alpha}\left[\mathcal{R}^{\beta}\left[f(x)\right]\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\lambda_n^{\alpha+\beta}e_n(\omega)$$

$$\mathcal{R}^{\beta}\left[\mathcal{R}^{\alpha}\left[f(x)\right]\right] = \mathcal{R}^{\beta}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\lambda_n^{\alpha}e_n(x)\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\lambda_n^{\alpha}\left[\mathcal{R}^{\beta}\left[e_n(\omega_1)\right]\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\lambda_n^{\alpha}\lambda_n^{\beta}e_n(\omega)$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{R}^{\beta}\left[\mathcal{R}^{\alpha}\left[f(x)\right]\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\lambda_n^{\alpha+\beta}e_n(\omega)$$

,άρα:

$$\Rightarrow \quad \mathcal{R}^{\alpha}\left[\mathcal{R}^{\beta}\left[f(x)\right]\right] = \mathcal{R}^{\beta}\left[\mathcal{R}^{\alpha}\left[f(x)\right]\right]$$

και:

$$\mathcal{R}^{\alpha+\beta}\left[f(x)\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \lambda_n^{\alpha+\beta} e_n(\omega) = \mathcal{R}^{\alpha}\left[\mathcal{R}^{\beta}\left[f(x)\right]\right]$$

Έτσι έχουμε μια ολοκληρωμένη μέθοδο για την εύρεση της γενικευμένης έκφρασης κάποιου τελεστή. Αρκεί ο τελεστής να είναι γραμμικός και οι ιδιοσυναρτήσεις του να αποτελούν πλήρες σύστημα στο διάστημα που ορίζονται. Από κει και πέρα φτάνει να προσδιορίσουμε τις ιδιοσυναρτήσεις αυτές και να υπολογίσουμε την συνάρτηση K, και αν είναι δυνατόν την εκφράζουμε σε κλειστή μορφή. Τέλος λαμβάνουμε την δράση του $\mathcal{R}^{\alpha}$ από την σχέση:

$$\mathcal{R}^{\alpha}\left[f(x)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} K_{\alpha}(x,\omega) f(x) \mathrm{d}x$$

Σε επόμενα κεφάλαια θα γενικεύσουμε αρκετούς τελεστές. Επίσης να πούμε ότι δεν αναφέραμε ρητά την διατήρηση της γραμμικότητας σε περίπτωση γενίκευσης κάποιου τελεστή. Για τον τελεστή της παραγώγου θα το ελέγξουμε αργότερα. Για τελεστές που εφαρμόζεται η παραπάνω μέθοδος ισχύει πάντα. Πράγματι για $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^{\alpha}\left[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} K_{\alpha}(x,\omega)\left[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\right] \mathrm{d}x \\
&= c_1 \int_{-\infty}^{+\infty} K_{\alpha}(x,\omega) f_1(x) \mathrm{d}x + c_2 \int_{-\infty}^{+\infty} K_{\alpha}(x,\omega) f_2(x) \mathrm{d}x \\
&= c_1 \mathcal{R}^{\alpha}\left[f_1(x)\right] + c_2 \mathcal{R}^{\alpha}\left[f_2(x)\right]
\end{aligned}$$

Τελειώνοντας αυτό το κεφάλαιο θα δώσουμε έναν ορισμό.

Ορισμός:

Ονομάζουμε κάποιο θετικό ακέραιο αριθμό k περίοδο ενός τελεστή αν και μόνον αν $\lambda_n^k = 1, \ \forall \ n \in \mathbb{N}^*$ δηλαδή:

$$\mathcal{R}^{k}\left[f(x)\right] = f(x)$$

Κεφάλαιο 2

Γενικευμένος τελεστής Fourier

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε διεξοδικά με τον τελεστή Fourier. Θα βρούμε τον πυρήνα του στη γενική του έκφραση και τις ιδιότητες αυτού. Κατά συνέπεια θα βρούμε και τον γενικευμένο τελεστή Fourier, FrFT (fractional Fourier transform). Στα παραρτήματα δίνουμε τις ιδιότητες που έχει και την δράση του στις κλασσικές συναρτήσεις, ειδικά σε αυτές που χρησιμοποιούνται στην ανάλυση σήματος. Επίσης θα δείξουμε μία εφαρμογή του FrFT πάνω στις διαφορικές εξισώσεις.
Πρώτα όμως θα εξετάσουμε την κλασσική περίπτωση.

2.1 Κλασσικός τελεστής Fourier

2.1.1 Ορισμός

Η δράση του τελεστή Fourier πάνω σε μία συνάρτηση είναι:

$$\mathcal{F}\cdot f \quad \mapsto \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-j\omega x}\mathrm{d}x$$

και συμβολίζεται με την μορφή:

$$\mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-j\omega x}\mathrm{d}x = F(\omega)$$

Η δράση του τελεστή Fourier σε μία συνάρτηση ονομάζεται και μετασχηματισμός Fourier FT (Fourier transform) της συνάρτησης ή ολοκλήρωμα Fourier της συνάρτησης. Αν έχουμε την μετασχηματισμένη συνάρτηση $F(\omega)$ και θέλουμε να πάρουμε την $f(x)$, μετασχηματίζουμε με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{j\omega x}\mathrm{d}\omega$$

2.1.2 Ιδιότητες του FT

Για τον FT ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1.Γραμμικότητα

Αν υποθέτουμε για τις συναρτήσεις $f_i(x)$ ότι:

$$f_i(x) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} F_i(\omega) \qquad ,\forall \ i \in \mathbb{N}$$

,τότε ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \sum_{i=1}^{n} c_i F_i(\omega) \equiv F(\omega) \qquad ,n \in \mathbb{N} \quad \forall \ c_i \in \mathbb{R}$$

Απόδειξη:

Ο FT του αθροίσματος είναι:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x) \mathrm{e}^{-j\omega x} \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} c_i f_i(x) \mathrm{e}^{-j\omega x} \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad F(\omega) = \sum_{i=1}^{n} F_i(\omega)$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}\left[\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x)\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i F_i(\omega)$$

όπου:

$$F_i(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x) \mathrm{e}^{-j\omega x} \mathrm{d}x$$

2.Ολίσθηση στο χρόνο

Αν υποθέτουμε για τη συνάρτηση $f(x)$ ότι:

$$f(x) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$$

,τότε ισχύει:

$$f(x - x_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)\mathrm{e}^{-j\omega x_0} \equiv G(\omega)$$

Απόδειξη:

Με την μέθοδο αλλαγής μεταβλητών έχουμε:

$$x - x_0 = t \quad \Rightarrow \quad x = t + x_0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$

,έτσι ο FT της $f(x - x_0)$ θα είναι:

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - x_0)\mathrm{e}^{-j\omega x} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j\omega(t-x_0)} \mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \quad G(\omega) = \mathrm{e}^{-j\omega x_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t} \mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}\left[f(x - x_0)\right] = \mathrm{e}^{-j\omega x_0} F(\omega)$$

3.Ολίσθηση στη συχνότητα:

Αν υποθέτουμε για τη συνάρτηση $f(x)$ ότι:

$$f(x) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$$

,τότε ισχύει:

$$\mathrm{e}^{\pm j\omega_0 x} f(x) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega \mp \omega_0)$$

Απόδειξη:

Είναι:

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{\pm j\omega_0 x} f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\pm j\omega_0 x} f(x) \mathrm{e}^{-j\omega x} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{e}^{-j(\omega \mp \omega_0)x} \mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}[\mathrm{e}^{\pm j\omega_0 x} f(x)] = F(\omega \mp \omega_0)$$

3.Κλιμάκωση στο χρόνο:

Αν υποθέτουμε για τη συνάρτηση $f(x)$ ότι:

$$f(x) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} F(\omega)$$

,τότε ισχύει:

$$f(ax) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \qquad , \forall \ a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Απόδειξη:

Θα μελετήσουμε ξεχωριστά τις περιπτώσεις για $a < 0$ και $a > 0$. Θέτοντας $t = ax$ για $a > 0$ θα έχουμε:

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax) \mathrm{e}^{-j\omega x} \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \mathrm{e}^{-j\left(\frac{\omega}{a}\right)t} \mathrm{d}t = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Για $a < 0$ γίνονται όλα ανάλογα με την διαφορά ότι τα όρια αλλάζουν, διότι για $x \to +\infty$ έχουμε $t \to -\infty$ και για $x \to -\infty$ έχουμε $t \to +\infty$, οπότε:

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax) \mathrm{e}^{-j\omega x} \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \int_{+\infty}^{-\infty} f(t) \mathrm{e}^{-j\left(\frac{\omega}{a}\right)t} \mathrm{d}t$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \mathrm{e}^{-j\left(\frac{\omega}{a}\right)t} \mathrm{d}t = -\frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Συνενώνοντας σε έναν τύπο έχουμε:

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

4.Συμμετρία:

Αν υποθέτουμε για τη συνάρτηση $f(x)$ ότι:

$$f(x) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} F(\omega)$$

,τότε ισχύει:

$$F(x) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi f(-\omega)$$

Απόδειξη:

Από τον FT αντίστροφο είναι:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{j\omega x}\mathrm{d}\omega$$

,αλλάζοντας της μεταβλητές x με t και ω με y έχουμε:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(y)\mathrm{e}^{jyt}\mathrm{d}y \;\;\Rightarrow\;\; 2\pi f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(y)\mathrm{e}^{jty}\mathrm{d}y$$

$$\Rightarrow\;\; 2\pi f(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(y)\mathrm{e}^{-jty}\mathrm{d}y = \mathcal{F}[F(y)]$$

$$\Rightarrow\;\; \mathcal{F}[F(x)] = 2\pi f(-\omega)$$

5.Μιγαδική συζυγία:

Για μια μιγαδική συνάρτηση $f(x) = f_1(x) + f_2(x)j$, όπου f_1 και f_2 πραγματικές συναρτήσεις, αν υποθέσουμε για την f ότι:

$$f(x) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} F(\omega)$$

,τότε ισχύει:

$$\overline{f}(x) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \overline{F}(-\omega)$$

<u>Απόδειξη:</u>

Ο FT $f(x)$ της είναι:

$$\mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f}(x)\mathrm{e}^{-j\omega x}\mathrm{d}x = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{j\omega x}\mathrm{d}x} = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-j(-\omega)x}\mathrm{d}x}$$

$$\Rightarrow\;\; \mathcal{F}[\overline{f}(x)] = \overline{F}(-\omega)$$

6.Παραγώγιση στο χρόνο:

Ο FT της n-παραγώγου, ως προς τον χρόνο, μιας συνάρτησης f είναι:

$$\frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} (j\omega)^n F(\omega) \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$$

,όπου θεωρήσαμε:

$$f(x) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} F(\omega)$$

<u>Απόδειξη:</u>

Θα δείξουμε την ιδιότητα αυτή με την μέθοδο της επαγωγής. Για $n = 1$ πρέπει:

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} (j\omega)F(\omega)$$

,πράγματι:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\mathrm{e}^{-j\omega x}\mathrm{d}x = \left[f(x)\mathrm{e}^{-j\omega x}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-j\omega)\mathrm{e}^{-j\omega x}\mathrm{d}x \\ &= \left[f(x)\cos(\omega x) - jf(x)\sin(\omega x)\right]_{-\infty}^{+\infty} + (j\omega)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-j\omega x}\mathrm{d}x \\ &= (j\omega)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-j\omega x}\mathrm{d}x = (j\omega)F(\omega) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{d}^1 f(x)}{\mathrm{d}x^1}\right] = (j\omega)^1 F(\omega)\end{aligned}$$

Αν όταν ισχύει για $n = k$ συνεπάγεται ότι ισχύει και για $n = k + 1$, δηλαδή:

$$\frac{\mathrm{d}^k f(x)}{\mathrm{d}x^k} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (j\omega)^k F(\omega) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^{(k+1)} f(x)}{\mathrm{d}x^{(k+1)}} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (j\omega)^{(k+1)} F(\omega)$$

,τότε έχουμε δείξει τα δύο σκέλη της μεθόδου και η ιδιότητα ισχύει, πράγματι:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{d}^{(k+1)} f(x)}{\mathrm{d}x^{(k+1)}}\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(k+1)}(x)\mathrm{e}^{-j\omega x}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^k(x)\mathrm{e}^{-j\omega x}\mathrm{d}x \\ &= \left[f^k(x)\mathrm{e}^{-j\omega x}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f^k(x)(-j\omega)\mathrm{e}^{-j\omega x}\mathrm{d}x \\ &= (j\omega)\int_{-\infty}^{+\infty} f^k(x)\mathrm{e}^{-j\omega x}\mathrm{d}x = (j\omega)(j\omega)^k F(\omega)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{d}^{(k+1)} f(x)}{\mathrm{d}x^{(k+1)}}\right] = (j\omega)^{(k+1)} F(\omega)$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{d}^{(n)} f(x)}{\mathrm{d}x^{(n)}}\right] = (j\omega)^{(n)} F(\omega)$$

2.1.3 FT μερικών συναρτήσεων

Εδώ θα μετασχηματίσουμε κάποιες συναρτήσεις με τον κλασσικό μετασχηματισμό Fourier.

1. FT της $f(x) = \delta(x)$:

Από την γνωστή ιδιότητα της $\delta(x)$:

$$\delta(x)\phi(x) = \delta(x)\phi(0)$$

,έχουμε:

$$\mathcal{F}\left[\delta(x)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\mathrm{e}^{-j\omega x}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\mathrm{e}^{-j\omega 0}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\mathrm{d}x = 1$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}\left[\delta(x)\right] = 1$$

2. FT της $f(x) = 1$:

Κάνουμε την παρατήρηση ότι:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{j\omega x}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\omega x)\mathrm{d}\omega + j\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(\omega x)\mathrm{d}\omega\right] =$$

$$\Rightarrow \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\omega x)\mathrm{d}\omega$$

,όπου πήραμε τον αντίστροφο FT της $\delta(x)$, επίσης η $sin(x)$ είναι περιττή συνάρτηση, έτσι:

$$\mathcal{F}\left[1\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-j\omega x}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{j(-\omega)x}\mathrm{d}x = 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}\left[1\right] = 2\pi\delta(\omega)$$

3. FT της $f(x) = \mathrm{e}^{j\omega_0 x}$:

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{j\omega_0 x}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{j\omega_0 x}\mathrm{e}^{-j\omega x}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-j(\omega-\omega_0)x}\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{j\omega_0 x}\right] = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

4. FT της $f(x) = \cos(\omega_0 x)$ και της $f(x) = \sin(\omega_0 x)$:

Είναι:

$$\cos(\omega_0 x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{j\omega_0 x} + \mathrm{e}^{-j\omega_0 x}\right) \quad , \quad \sin(\omega_0 x) = -\frac{1}{2}j\left(\mathrm{e}^{j\omega_0 x} - \mathrm{e}^{-j\omega_0 x}\right)$$

,άρα έχουμε:

$$\mathcal{F}\left[\cos(\omega_0 x)\right] = \frac{1}{2}\left\{\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{j\omega_0 x}\right] + \mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-j\omega_0 x}\right]\right\} = \frac{1}{2}\left[2\pi\delta(\omega-\omega_0) + 2\pi\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}\left[\cos(\omega_0 x)\right] = \pi\left[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right]$$

,ομοίως:

$$\mathcal{F}\left[\sin(\omega_0 x)\right] = -\pi j\left[\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)\right]$$

2.2 Γενίκευση του τελεστή Fourier

Μέχρι τώρα μιλούσαμε λίγο πιο γενικά για συναρτήσεις. Εδώ βολεύει αντί μία οποιαδήποτε μεταβλητή x να χρησιμοποιούμε την μεταβλητή t, $(x \to t)$ και αντί την μεταβλητή ω την f, $(\omega \to 2\pi f)$. Αυτό βολεύει τόσο στη διαίσθηση όσο και στις πράξεις. Θα γενικεύσουμε τον τελεστή Fourier σύμφωνα με την μέθοδο που αναπτύξαμε στο πρώτο κεφάλαιο. Είναι γνωστό ότι οι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή Fourier είναι:

$$\Psi_n(t) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{n!2^n}}H_n(\sqrt{2\pi}t)\mathrm{e}^{-\pi t^2}$$

,όπου:

$$H_n(t) = (-1)^n\mathrm{e}^{t^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left[\mathrm{e}^{-t^2}\right] \qquad ,\forall \;\; n \in \mathbb{N}^*$$

,είναι τα πολυώνυμα Hermite.
Και οι ιδιοτιμές του είναι $\lambda_n = (-j)^n = \mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{2}}$. Οι ιδιοσυναρτήσεις αυτές αποτελούν πλήρες σύστημα στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$. Έτσι για τον γενικευμένο πυρήνα του τελεστή Fourier έχουμε:

$$\begin{aligned}
K_\alpha(t,f) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n^\alpha e_n^*(t) e_n(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n^\alpha \Psi_n^*(t)\Psi_n(f) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} ((-j)^n)^\alpha \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{n!2^n}} H_n(\sqrt{2\pi}t)\mathrm{e}^{-\pi t^2} \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{n!2^n}} H_n(\sqrt{2\pi}f)\mathrm{e}^{-\pi f^2} \\
&= \sqrt{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-j\alpha\pi n/2} \frac{1}{n!2^n} H_n(\sqrt{2\pi}t) H_n(\sqrt{2\pi}f)\mathrm{e}^{-\pi(t^2+f^2)} \\
\Rightarrow \quad K_\alpha(t,f) &= \sqrt{2}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(\sqrt{2\pi}t)H_n(\sqrt{2\pi}f)}{n!2^n}\mathrm{e}^{-jan}\right]\mathrm{e}^{-\pi(t^2+f^2)} \quad , \quad a = \alpha\pi/2
\end{aligned}$$

Το άθροισμα τώρα μπορεί να εκφραστεί σε κλειστή μορφή με την βοήθεια της σχέσεις Mehler η οποία θα αποδειχτεί στα παραρτήματα:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(t)H_n(f)}{n!2^n} r^n = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \exp\left[\frac{2tfr - (t^2+f^2)r^2}{1-r^2}\right]$$

Για $r = \mathrm{e}^{-ja}$, $t \to \sqrt{2\pi}t$ και $f \to \sqrt{2\pi}f$ έχουμε:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(\sqrt{2\pi}t)H_n(\sqrt{2\pi}f)}{n!2^n}\mathrm{e}^{-jna} = \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2ja}}} \exp\left[\frac{2\sqrt{2\pi}t\sqrt{2\pi}f\mathrm{e}^{-ja} - ((\sqrt{2\pi}t)^2 + (\sqrt{2\pi}f)^2)\mathrm{e}^{-2ja}}{1-\mathrm{e}^{-2ja}}\right]$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad K_\alpha(t,f) &= \sqrt{\frac{2}{1-\mathrm{e}^{-2ja}}} \exp\left[\frac{2\sqrt{2\pi}t\sqrt{2\pi}f\mathrm{e}^{-ja} - (2\pi t^2 + 2\pi f^2)\mathrm{e}^{-2ja}}{1-\mathrm{e}^{-2ja}} - \pi(t^2+f^2)\right] \\
\Rightarrow \quad K_\alpha(t,f) &= \sqrt{\frac{2}{1-\mathrm{e}^{-2ja}}} \exp\left[2\pi\frac{2tf\mathrm{e}^{-ja}}{1-\mathrm{e}^{-ja}} - 2\left(\frac{\mathrm{e}^{-2ja}}{1-\mathrm{e}^{-2ja}} + \frac{1}{2}\right)\pi(t^2+f^2)\right]
\end{aligned}$$

Με την βοήθεια των παρακάτω σχέσεων:

$$\sqrt{\frac{2}{1-\mathrm{e}^{-2ja}}} = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}^{-ja}(\mathrm{e}^{ja}-\mathrm{e}^{-ja})}} = \sqrt{\frac{\mathrm{e}^{ja}}{j\sin a}} = \sqrt{\frac{\cos a + j\sin a}{j\sin a}} = \sqrt{1-j\cot a}$$

$$\frac{\mathrm{e}^{-2ja}}{1-\mathrm{e}^{-2ja}} + \frac{1}{2} = \frac{\mathrm{e}^{-2ja}}{\mathrm{e}^{-ja}(\mathrm{e}^{ja}-\mathrm{e}^{-ja})} + \frac{1}{2} = \frac{\mathrm{e}^{-ja}}{j\sin a} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos a - j\sin a}{j\sin a} + 1\right) = -\frac{j}{2}\cot a$$

$$\frac{2tf\mathrm{e}^{-ja}}{1-\mathrm{e}^{-2ja}} = \frac{2tf\mathrm{e}^{-ja}}{\mathrm{e}^{-ja}(\mathrm{e}^{ja}-\mathrm{e}^{-ja})} = \frac{tf}{j\sin a} = -jtf\csc a$$

,έχουμε:

$$\begin{aligned}
K_\alpha(t,f) &= \sqrt{1-j\cot a}\exp\left[-2\pi jtf\csc a + j\pi(t^2+f^2)\cot a\right] \\
\Rightarrow \quad K_\alpha(t,f) &= \sqrt{1-j\cot a}\exp\left\{j\pi\left[(t^2+f^2)\cot a - 2tf\csc a\right]\right\}
\end{aligned}$$

Οπότε ο κλασματικός μετασχηματισμός Fourier είναι:

$$\mathcal{F}^\alpha[f(x)] = \sqrt{1-j\cot a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp\left\{j\pi\left[(x^2+f^2)\cot a - 2xf\csc a\right]\right\}\mathrm{d}x$$

2.2.1 Ιδιότητες του πυρήνα του FrFT

1.Συμμετρία:

$$K_\alpha(t,f) = K_\alpha(f,t)$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} K_\alpha(f,t) &= \sqrt{1-j\cot a}\ \exp\left\{j\pi\left[(f^2+t^2)\cot a - 2ft\csc a\right]\right\} \\ &= \sqrt{1-j\cot a}\ \exp\left\{j\pi\left[(t^2+f^2)cota - 2tf\csc a\right]\right\} = K_\alpha(t,f) \end{aligned}$$

2.Μιγαδικός συζυγής:

$$K_{-\alpha}(t,f) = \overline{K}_\alpha(t,f)$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} K_{-\alpha}(t,f) &= \sqrt{1-j\cot(-a)}\ \exp\left\{j\pi\left[(t^2+f^2)\cot(-a) - 2tf\csc(-a)\right]\right\} \\ &= \sqrt{1+j\cot a}\ \exp\left\{j\pi\left[-(t^2+f^2)\cot a + 2tf\csc a\right]\right\} \end{aligned}$$

και:

$$\begin{aligned} \overline{K}_\alpha(t,f) &= \overline{\sqrt{1-j\cot a}\ \exp\{j\pi\,[(t^2+f^2)\cot a - 2tf\csc a]\}} \\ &= \overline{\sqrt{1-j\cot a}}\ \ \overline{\exp\{j\pi\,[(t^2+f^2)\cot a - 2tf\csc a]\}} \\ &= \overline{\sqrt{1-j\cot a}}\ \ \exp\left\{-j\pi\left[(t^2+f^2)\cot a - 2tf\csc a\right]\right\} \\ &= \overline{\sqrt{1-j\cot a}}\ \ \exp\left\{j\pi\left[-(t^2+f^2)\cot a + 2tf\csc a\right]\right\} \end{aligned}$$

,αλλά όπως δείξαμε και παραπάνω:

$$\sqrt{1-j\cot a} = \sqrt{\frac{2}{1-\mathrm{e}^{-2ja}}}$$

,άρα:

$$\begin{aligned} \overline{\sqrt{1-j\cot a}} &= \overline{\sqrt{\frac{2}{1-\mathrm{e}^{-2ja}}}} = \sqrt{\frac{2}{1-\mathrm{e}^{-2ja}}} = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}^{-ja}(\mathrm{e}^{ja}-\mathrm{e}^{-ja})}} = \sqrt{\frac{\mathrm{e}^{ja}}{j\sin a}} \\ &= \sqrt{\frac{\mathrm{e}^{-ja}}{-j\sin a}} = \sqrt{\frac{\cos a - j\sin a}{-j\sin a}} = \sqrt{-\frac{1}{j}\cot a + 1} = \sqrt{1+j\cot a} \end{aligned}$$

3.Σημειακή συμμετρία:

$$K_\alpha(-t,f) = K_\alpha(t,-f)$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} K_\alpha(-t,f) &= \sqrt{1-j\cot a}\ \exp\left\{j\pi\left[((-t)^2+f^2)\cot a-2(-t)f\csc a\right]\right\} \\ &= \sqrt{1-j\cot a}\ \exp\left\{j\pi\left[(t^2+(-f)^2)\cot a-2t(-f)\csc a\right]\right\} = K_\alpha(t,-f) \end{aligned}$$

4.Ορθογωνιότητα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_\alpha(t,f)\overline{K}_\alpha(t,f')\mathrm{d}t = \delta(f-f')$$

Απόδειξη:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_\alpha(t,f)\overline{K}_\alpha(t,f')\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{1-j\cot a}\ \exp\left\{j\pi\left[(t^2+f^2)\cot a-2tf\csc a\right]\right\}\cdot$$
$$\cdot\overline{\sqrt{1-j\cot a}\ \exp\{j\pi\left[(t^2+f'^2)\cot a-2tf'\csc a\right]\}}\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{1-j\cot a}\ \exp\left\{j\pi\left[(t^2+f^2)\cot a-2tf\csc a\right]\right\}\cdot$$
$$\cdot\overline{\sqrt{1-j\cot a}}\ \overline{\exp\{j\pi\left[(t^2+f'^2)\cot a-2tf'\csc a\right]\}}\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{1-j\cot a}\ \exp\left\{j\pi\left[(t^2+f^2)\cot a-2tf\csc a\right]\right\}\cdot$$
$$\cdot\overline{\sqrt{1-j\cot a}}\ \exp\left\{-j\pi\left[(t^2+f'^2)\cot a-2tf'\csc a\right]\right\}\mathrm{d}t =$$

,έχουμε δείξει ότι:

$$\overline{\sqrt{1-j\cot a}} = \sqrt{1+j\cot a}$$

,άρα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_\alpha(t,f)\overline{K}_\alpha(t,f')\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{(1-j\cot a)(1+j\cot a)}\ \cdot$$
$$\cdot\exp\left\{j\pi\left[(t^2+f^2)\cot a-2tf\csc a-(t^2+f'^2)\cot a+2tf'\csc a\right]\right\}\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{1+\cot^2 a}\ \cdot$$
$$\cdot\exp\left\{j\pi\left[t^2\cot a+f^2\cot a-2tf\csc a-t^2\cot a-f'^2\cot a+2tf'\csc a\right]\right\}\mathrm{d}t =$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{1+\cot^2 a}\ \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{j\pi\left[(f^2-f'^2)\cot a-2t\csc a(f-f')\right]\right\}\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{1+\cot^2 a}\ \exp\left\{j\pi\left[(f^2-f'^2)\cot a\right]\right\}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{j\pi\left[-2t(f-f')\csc a\right]\right\}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

,αλλά έχουμε της παρακάτω σχέσεις (Η δεύτερη δείχτηκε παραπάνω):

$$\sqrt{1+\cot^2 a}=\sqrt{1+\frac{\cos^2 a}{\sin^2 a}}=\sqrt{\frac{\sin^2 a+\cos^2 a}{\sin^2 a}}=\sqrt{\frac{1}{\sin^2 a}}=\frac{1}{|\sin a|}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t=2\pi\delta(\omega)$$

,οπότε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}K_\alpha(t,f)\overline{K}_\alpha(t,f')\mathrm{d}t=$$

$$\begin{aligned}
&=\frac{1}{|\sin a|}\exp\left\{j\pi\left[(f^2-f'^2)\cot a\right]\right\}2\pi\delta(-j2\pi(f-f')\csc a)\\
&=\frac{1}{|\sin a|}\exp\left\{j\pi\left[(f^2-f'^2)\cot a\right]\right\}2\pi\frac{1}{|-j2\pi\csc a|}\delta(f-f')
\end{aligned}$$

,από την γνωστή ιδιότητα $\delta(at)=1/|a|\delta(t)$. Επίσης $1/|\sin a|=|\csc a|$, άρα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}K_\alpha(t,f)\overline{K}_\alpha(t,f')\mathrm{d}t=$$

$$\begin{aligned}
&=\frac{1}{|\sin a|}\exp\left\{j\pi\left[(f^2-f'^2)\cot a\right]\right\}2\pi\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|\csc a|}\delta(f-f')\\
&=\exp\left\{j\pi\left[(f^2-f'^2)\cot a\right]\right\}\delta(f-f')=\delta(f-f')
\end{aligned}$$

2.3 Εφαρμογή του FrFT

Θα δούμε τώρα μια μέθοδο που χρησιμοποιεί κάποια από αυτά που εξάγαμε παραπάνω. Πρόκειται για μια μέθοδο που είναι σχετικά καινούρια. Μας βοηθάει να ελαττώσουμε την τάξη μιας διαφορικής εξίσωσης, πράγμα που σημαίνει ενδεχόμενη εύρεση μερικής λύσης. Το πεδίο των διαφορικών εξισώσεων, είναι ένα πεδίο, που δύσκολα κανείς βρίσκει γενικές μεθόδους, που να λύνουν μεγάλο πλήθος εξισώσεων. Έτσι και σε αυτήν την μέθοδο μόνο σε λίγες περιπτώσεις έχουμε αποτελέσματα. Ειδικότερα όταν πρόκειται για διαφορικές εξισώσεις πολύ μεγάλης τάξης (πάνω από τέταρτη), το πρόβλημα γίνεται πολύ δύσκολο.

Θα δημιουργήσουμε έναν καινούριο τελεστή για την εφαρμογή μας. Τον $\mathcal{F}^\alpha L\mathcal{F}^{-\alpha}$. Το L ονομάζεται ιδιοφάση του τελεστή αυτού αν ισχύει:

$$\mathcal{F}^\alpha L\mathcal{F}^{-\alpha}=\lambda L\quad,\quad\lambda\in\mathbb{C}$$

Το λ ονομάζεται ιδιοτιμή της ιδιοφάσης. Για παράδειγμα οι τελεστές $g_-=x+\frac{\partial}{\partial x}=x+D$ και $g_+=x-\frac{\partial}{\partial x}=x-D$ είναι ιδιοφάσης του τελεστή $\mathcal{F}^\alpha L\mathcal{F}^{-\alpha}$, με ιδιοτιμές $\mathrm{e}^{-i\alpha}$ και $\mathrm{e}^{+i\alpha}$ αντίστοιχα, αφού ισχύουν:

$$\mathcal{F}^\alpha g_-\mathcal{F}^{-\alpha}=\mathrm{e}^{-i\alpha}g_-\qquad\mathcal{F}^\alpha g_+\mathcal{F}^{-\alpha}=\mathrm{e}^{i\alpha}g_+$$

D-dominant παράσταση και Leading παράσταση:

Ονομάζουμε D-dominant παράσταση την εξής έκφραση:

$$L=p_0(x)D^n+p_1(x)D^{n-1}+\cdots\quad,\quad p_k(x)\in\mathbb{C}[x]\ ,\ p_0(x)\neq 0$$

Με:

$$k = 0, 1, \ldots, n \quad , \qquad \mathrm{deg} p_k(x) \leq k \quad , \qquad D = \frac{\partial}{\partial x}$$

Δηλαδή ο μέγιστος βαθμός κάθε πολυωνύμου p_k είναι όσο και η τάξη του τελεστή D στον οποίο πολλαπλασιάζεται μείον το k. Γενικά το p_k είναι:

$$p_k(x) = a_{k,k}x^k + a_{k,k-1}x^{k-1} + a_{k,k-2}x^{k-2} + \cdots \quad , \qquad a_{k,k}, a_{k,k-1}, a_{k,k-2}, \ldots \neq 0$$

Στην ειδική περίπτωση όπου για κάθε πολυώνυμο p_k ισχύει $a_{k,k} \neq 0$ και $a_{k,k-1}, a_{k,k-2}, \ldots = 0$ η έκφραση ονομάζεται Leading παράσταση. Συμβολίζεται ως:

$$L_0 = a_0 D^n + a_1 x D^{n-1} + a_2 x^2 D^{n-2} + \cdots$$

Επίσης ορίζουμε και μία συνάρτηση η οποία ονομάζεται Leading symbol:

$$\zeta(x,p) = a_0(ip)^n + a_1 x(ip)^{n-1} + a_2 x^2 (ip)^{n-2} + \cdots$$

Η μέθοδος ασχολείται με διαφορικές εξισώσεις που ο τελεστής της εξίσωσης είναι Leading παράσταση.

<u>παράδειγμα:</u>

$$u(x)_{xxxx} + 4x^2 u(x)_{xx} + 3x^4 u(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad (D^4 + 4x^2 D^2 + 3x^4)u(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad L_0 u(x) = 0$$

Και το αντίστοιχο Leading symbol:

$$\zeta(x,p) = (ip)^4 + 4x^2(ip)^2 + 3x^4 = p^4 + 3x^4 - 4x^2p^2$$

Η διαδικασία που ακολουθούμε είναι η εξής.

Βρίσκουμε την Leading παράσταση της διαφορικής εξίσωσης. Αν δεν έχει, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο. Έπειτα εφαρμόζουμε των τελεστή $\mathcal{F}^{\alpha} L_0 \mathcal{F}^{-\alpha}$ στην εξίσωση και προσπαθούμε με κατάλληλο α να ρίξουμε την τάξη του L_0 , έτσι και την τάξη της εξίσωσης. Τα κατάλληλα α είναι οι ρίζες του Leading symbol για $x = \sin\alpha$ και $p = \cos\alpha$.

Για παράδειγμα για την διαφορική εξίσωση $u_{xx}(x) + x^2 u(x) = 0$, έχουμε:

$$L_0 = D^2 + x^2 \quad \Rightarrow \quad L = \mathcal{F}^{\alpha} L_0 \mathcal{F}^{-\alpha}$$
$$\Rightarrow \quad L = (x\cos\alpha + p\sin\alpha)^2 - (-x\sin\alpha + p\cos\alpha)^2$$

Στις πράξεις πρέπει να προσέχουμε την σειρά διότι τα x και $p = -i\frac{\partial}{\partial x}$ είναι τελεστές και όχι μεταβλητές:

$$L = x^2\cos^2\alpha + xp\cos\alpha\sin\alpha + px\cos\alpha\sin\alpha + p^2\sin^2\alpha -$$
$$- (-x^2\sin\alpha - xp\cos\alpha\sin\alpha - px\cos\alpha\sin\alpha + p^2\cos\alpha) =$$

$$= x^2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + p^2(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) +$$
$$+ 4\cos\alpha\sin\alpha xp + 2\cos\alpha\sin\alpha px - 2\cos\alpha\sin\alpha xp =$$

$$= \cos(2\alpha)x^2 - \cos(2\alpha)p^2 + 2\sin(2\alpha)xp - i\sin(2\alpha)$$

Όπου κάναμε χρήση του μεταθέτη $[p,x] = -i$. Για τα κατάλληλα α έχουμε:

$$\zeta(x,p) = (ip)^2 + x^2 = x^2 - p^2 \quad \Rightarrow \quad \zeta(\cos\alpha, \sin\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0$$
$$\Rightarrow \quad \cos\alpha = \pm\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Οπότε:

$$L = 2xp - i = -2ix\frac{\partial}{\partial x} - i = -2ixD - i$$
$$Lu(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -2ixu_x(x) - iu(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2xu_x(x) + u(x) = 0$$

Της οποίας η λύση δίνεται με την βοήθεια των συναρτήσεων Bessel και συνάμα αποτελεί ειδική λύση της $u_{xx}(x) + x^2u(x) = 0$.

$$u(x) = c\sqrt{|x|}J_{-1/4}\left(\frac{x^2}{2}\right) \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

Η κύρια δυσκολία είναι ο υπολογισμός του $\mathcal{F}^{\alpha}L_0\mathcal{F}^{-\alpha}$ και για αυτόν το λόγο για μεγάλες τάξεις το πρόβλημα γίνεται περίπλοκο. Επίσης παρουσιάζονται δύσκολες τριγωνομετρικές εξισώσεις.

Κεφάλαιο 3

Γενικευμένος τελεστής Hartley

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τον τελεστή Hartley. Θα εξάγουμε τον γενικευμένο πυρήνα αυτού, βρίσκοντας την σχέση που έχει με τον γενικευμένο πυρήνα του FT. Γενικά ο μετασχηματισμός Hartley (HT) και ο FT σχετίζονται ιδιαίτερα. Θα τα δούμε όλα αυτά ξεκινώντας με τον κλασσικό ορισμό.

3.1 Κλασσικός τελεστής Hartley

3.1.1 Ορισμός

Η δράση του τελεστή Hartley πάνω σε μία συνάρτηση είναι:

$$\mathcal{H}\cdot f \quad \mapsto \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\cos\omega x+\sin\omega x)\mathrm{d}x$$

και συμβολίζεται με την μορφή:

$$\mathcal{H}[f(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\cos\omega x+\sin\omega x)\mathrm{d}x=H(\omega)$$

Ορίζοντας την συνάρτηση $\mathrm{cas}(x)=\sin x+\cos x$ έχουμε:

$$\mathcal{H}[f(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{cas}(\omega x)\mathrm{d}x$$

Ή από την ταυτότητα $\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})=\sin x+\cos x$:

$$\mathcal{H}[f(x)]=\sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(\omega x-\frac{\pi}{4})\mathrm{d}x$$

3.1.2 Ιδιότητες του HT

Για τον HT ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1.Γραμμικότητα

Αν υποθέτουμε για τις συναρτήσεις $f_i(x)$ ότι:

$$f_i(x) \xleftrightarrow{\mathcal{H}} H_i(\omega) \qquad ,\forall \;\; i\in\mathbb{N}$$

,τότε ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x) \xleftrightarrow{\mathcal{H}} \sum_{i=1}^{n} c_i H_i(\omega)\equiv H(\omega) \qquad ,n\in\mathbb{N}$$

Απόδειξη:

Ο FT του αθροίσματος είναι:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x)\, \mathrm{cas}(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x)\, \mathrm{cas}(x)\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; H(\omega) = \sum_{i=1}^{n} c_i H_i(\omega)$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}\left[\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x)\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i H_i(\omega)$$

όπου:

$$H_i(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x)\, \mathrm{cas}(x)\mathrm{d}x$$

2.Κλιμάκωση στο χρόνο:

Αν υποθέτουμε για τη συνάρτηση $f(x)$ ότι:

$$f(x) \stackrel{\mathcal{H}}{\longleftrightarrow} H(\omega)$$

,τότε ισχύει:

$$f(ax) \stackrel{\mathcal{H}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} H\left(\frac{\omega}{a}\right) \qquad ,\forall\; a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Απόδειξη:

Θα μελετήσουμε ξεχωριστά τις περιπτώσεις για $a < 0$ και $a > 0$. Θέτοντας $t = ax$ για $a > 0$ θα έχουμε:

$$\mathcal{H}[f(ax)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax)\mathrm{cas}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{cas}\left(\frac{\omega}{a}t\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{a} H\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Για $a < 0$ γίνονται όλα ανάλογα με την διαφορά ότι τα όρια αλλάζουν, διότι για $x \to +\infty$ έχουμε $t \to -\infty$ και για $x \to -\infty$ έχουμε $t \to +\infty$, οπότε:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}[f(ax)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax)\mathrm{cas}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_{+\infty}^{-\infty} f(t)\mathrm{cas}\left(\frac{\omega}{a}t\right)\mathrm{d}t \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{cas}\left(\frac{\omega}{a}t\right)\mathrm{d}t = -\frac{1}{a} H\left(\frac{\omega}{a}\right)\end{aligned}$$

Συνενώνοντας σε έναν τύπο έχουμε:

$$\mathcal{H}[f(ax)] = \frac{1}{|a|} H\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

3.Ολίσθηση στο χρόνο

Αν υποθέτουμε για τη συναρτήση $f(t)$ ότι:

$$f(t) \stackrel{\mathcal{H}}{\longleftrightarrow} H(\omega)$$

,τότε ισχύει:

$$f(t - t_0) \stackrel{\mathcal{H}}{\longleftrightarrow} \cos(\omega t_0)H(\omega) + \sin(\omega t_0)H(-\omega)$$

Απόδειξη:

Με την μέθοδο αλλαγής μεταβλητών έχουμε:

$$t - t_0 = x \quad \Rightarrow \quad t = x + t_0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t = \mathrm{d}x$$

,έτσι ο HT της $f(t - t_0)$ θα είναι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t - t_0)\mathrm{cas}(\omega t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{cas}(\omega x + \omega t_0)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)[\sin(\omega x + \omega t_0) + \cos((\omega x + \omega t_0)]\mathrm{d}x =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)[\sin(\omega x)\cos(\omega t_0) + \cos(\omega x)\sin(\omega x) + \cos(\omega x)\cos(\omega t_0) - \sin(\omega x)\sin(\omega t_0)]\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(\omega t_0)[\cos(\omega x) + \sin(\omega x)]\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(\omega t_0)[\cos(\omega x) - \sin(\omega x)]\mathrm{d}x \\
&= \cos(\omega t_0)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)[\sin(\omega x) + \cos(\omega x)]\mathrm{d}x + \sin(\omega t_0)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)[\sin(-\omega x) + \cos(-\omega x)]\mathrm{d}x \\
&= \cos(\omega t_0)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{cas}(\omega x)\mathrm{d}x + \sin(\omega t_0)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{cas}(-\omega x)\mathrm{d}x \\
&= \cos(\omega t_0)H(\omega) + \sin(\omega t_0)H(-\omega)
\end{aligned}$$

3.1.3 Σχέση με τον FT

Θα αναπτύξουμε πρώτα μια σχέση μεταξύ του HT και του FT που ισχύει μόνο για πραγματικές συναρτήσεις. Θεωρούμε μια πραγματική συνάρτηση $f(x)$ και τον HT της $H(\omega)$. Το $H(\omega)$ είναι και αυτό μια πραγματική συνάρτηση εφόσον στον HT δεν εισάγεται πουθενά η μιγαδική μονάδα. Οπότε η $H(\omega)$ μπορεί πάντα να αναλυθεί σε ένα άρτιο και ένα περιττό μέλος:

$$H(\omega) = \frac{1}{2}H(\omega) + \frac{1}{2}H(\omega) + \frac{1}{2}H(-\omega) - \frac{1}{2}H(-\omega)$$

$$= \frac{H(\omega) + H(-\omega)}{2} + \frac{H(\omega) - H(-\omega)}{2} = H_e(\omega) + H_o(\omega)$$

Το $H_e(\omega)$ είναι μια άρτια συνάρτηση:

$$H_e(-\omega) = \frac{H(-\omega) + H(-(-\omega))}{2} = \frac{H(\omega) + H(-\omega)}{2} = H_e(\omega)$$

Το $H_o(\omega)$ είναι μια περιττή συνάρτηση:

$$H_o(-\omega) = \frac{H(-\omega) - H(-(-\omega))}{2} = -\frac{H(\omega) - H(-\omega)}{2} = -H_o(\omega)$$

Παρατηρούμε ότι:

$$H_e(\omega) = \frac{1}{2}H(\omega) + \frac{1}{2}H(-\omega) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\cos\omega x + \sin\omega x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\cos(-\omega x) + \sin(-\omega x))\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)[\cos\omega x + \sin\omega x + \cos\omega x - \sin\omega x]\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\omega x\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \qquad H_e(\omega) = Re[F(\omega)]$$

Επίσης:

$$H_o(\omega) = \frac{1}{2}H(\omega) - \frac{1}{2}H(-\omega) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\cos\omega x + \sin\omega x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\cos(-\omega x) + \sin(-\omega x))\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)[\cos\omega x + \sin\omega x - \cos\omega x + \sin\omega x]\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\omega x\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \qquad H_o(\omega) = -Im[F(\omega)]$$

Έτσι έχουμε τις δύο παρακάτω σχέσεις που συνδέουν τον HT με τον FT:

$$F(\omega) = H_e(\omega) + jH_o(\omega)$$

$$H(\omega) = Re[F(\omega)] - Im[F(\omega)]$$

Αυτές οι σχέσεις είναι πολύ χρήσιμες για τον υπολογισμό μετασχηματισμών Fourier και Hartley για πραγματικές συναρτήσεις όταν γνωρίζουμε τον πρώτο ή τον δεύτερο. Ή όταν κάποιος από τους δύο υπολογίζεται ευκολότερα γρήγορα μπορούμε να εξάγουμε τον άλλον. Θα δείξουμε τώρα την γενική σχέσει που συνδέει τους δύο μετασχηματισμούς, που ισχύει και για μιγαδικές συναρτήσεις.

$$H(\omega) = \frac{1+j}{2}F(\omega) + \frac{1-j}{2}F(-\omega)$$

<u>Απόδειξη</u>:

Ισχύει:

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-j\omega x}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos(-\omega x) + j\sin(-\omega x))\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos(\omega x) - j\sin(\omega x))\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\omega x)\mathrm{d}x - j\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\omega x)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Έχουμε:

$$\frac{1+j}{2}F(\omega) + \frac{1-j}{2}F(-\omega) = \frac{1}{2}F(\omega) + \frac{1}{2}F(-\omega) + \frac{j}{2}F(\omega) - \frac{j}{2}F(-\omega) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\omega x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}j\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\omega x)\mathrm{d}x + \\
&\qquad + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(-\omega x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}j\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(-\omega x)\mathrm{d}x + \\
&\qquad + \frac{1}{2}j\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\omega x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}jj\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\omega x)\mathrm{d}x - \\
&\qquad\qquad - \frac{1}{2}j\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(-\omega x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}jj\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(-\omega x)\mathrm{d}x =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\omega x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}j\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\omega x)\mathrm{d}x + \\
&\qquad + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\omega x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}j\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\omega x)\mathrm{d}x + \\
&\qquad + \frac{1}{2}j\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\omega x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\omega x)\mathrm{d}x - \\
&\qquad\qquad - \frac{1}{2}j\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\omega x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\omega x)\mathrm{d}x =
\end{aligned}
$$

$$
= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\omega x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\omega x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{cas}(\omega x)\mathrm{d}x = H(\omega)
$$

3.2 Γενίκευση του τελεστή Hartley

Θα γενικεύσουμε τον τελεστή Hartley με την μέθοδο που αναπτύξαμε στο πρώτο κεφάλαιο, που κάνει χρήση των ιδιοσυναρτήσεων και των ιδιοτιμών του τελεστή. Δεν θα είναι σαν το προηγούμενο κεφάλαιο, καθώς δεν είναι αναγκαίο να κάνουμε την διαδικασία από την αρχή. Στο ενδιάμεσο μπορούμε να συνδέσουμε τον γενικευμένο τελεστή Hartley και τον γενικευμένο τελεστή Fourier. Αυτό είναι δυνατόν διότι οι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή Hartley είναι ίδιες με αυτές του τελεστή Fourier, και είναι:

$$
\Psi_n(x) = H_n(\sqrt{2\pi}x)\mathrm{e}^{-\pi x^2} = \sqrt{\frac{\mathrm{e}^{-jn\frac{\pi}{2}}}{2^n(n)!\sqrt{\pi}}}\mathrm{e}^{-\pi x^2}H_n(x)
$$

,όπου βεβαίως $H_n(x)$ είναι τα πολυώνυμα Hermite. Οι ιδιοτιμές όμως του τελεστή Hartley διαφέρουν και είναι:

$$
\lambda_n = \begin{cases} \mathrm{e}^{-jn\frac{\pi}{2}} & ,n = 2k \\ \mathrm{e}^{-j(n-1)\frac{\pi}{2}} & ,n = 2k+1 \qquad \forall\ k \in \mathbb{N}^* \end{cases}
$$

Ο πυρήνας του γενικευμένου τελεστή Hartley θα είναι:

$$
\begin{aligned}
K_\alpha^H(x,f) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n^\alpha \Psi_n^*(x)\Psi_n(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n^\alpha \Psi_n(x)\Psi_n(f) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n^\alpha \sqrt{\frac{\mathrm{e}^{-jn\frac{\pi}{2}}}{2^n(n)!\sqrt{\pi}}}\mathrm{e}^{-\pi x^2}H_n(x)\sqrt{\frac{\mathrm{e}^{-jn\frac{\pi}{2}}}{2^n(n)!\sqrt{\pi}}}\mathrm{e}^{-\pi f^2}H_n(f) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n^\alpha \frac{\mathrm{e}^{-jn\frac{\pi}{2}}}{2^n(n)!\sqrt{\pi}}H_n(x)H_n(f)\mathrm{e}^{-\pi(x^2+f^2)}
\end{aligned}
$$

Θα χωρίσουμε το αθροίσματα εισάγοντας δύο συναρτήσεις, από τις οποίες η μία είναι άρτια και η άλλη περιττή:

$$E(x,f)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-jn\frac{\pi}{2}}}{2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}}H_{2n}(x)H_{2n}(f)$$
$$O(x,f)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-jn\frac{\pi}{2}}}{2^{2n+1}(2n+1)!\sqrt{\pi}}H_{2n+1}(x)H_{2n+1}(f)$$

,όπου η $E(x,f)$ είναι η άρτια (even) και η $O(x,f)$ είναι η περιττή (odd). Για να το δείξουμε αυτό θα χρειαστούμε την παρακάτω ιδιότητα των πολυωνύμων Hermite (αποδεικνύεται στα παραρτήματα):

$$H_n(-x)=\begin{cases} H_n(x) & ,n=2k \\ -H_n(x) & ,n=2k+1 \end{cases} \qquad \forall \;\; k\in\mathbb{N}^*$$

Έτσι έχουμε:

$$E(-x,f)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-jn\frac{\pi}{2}}}{2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}}H_{2n}(-x)H_{2n}(f)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-jn\frac{\pi}{2}}}{2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}}H_{2n}(x)H_{2n}(f)=E(x,f)$$
$$E(x,-f)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-jn\frac{\pi}{2}}}{2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}}H_{2n}(x)H_{2n}(-f)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-jn\frac{\pi}{2}}}{2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}}H_{2n}(x)H_{2n}(f)=E(x,f)$$

$$O(-x,f)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-jn\frac{\pi}{2}}}{2^{2n+1}(2n+1)!\sqrt{\pi}}H_{2n+1}(-x)H_{2n+1}(f)=$$
$$=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-jn\frac{\pi}{2}}}{2^{2n+1}(2n+1)!\sqrt{\pi}}H_{2n+1}(x)H_{2n+1}(f)=-O(x,f)$$

$$O(x,-f)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-jn\frac{\pi}{2}}}{2^{2n+1}(2n+1)!\sqrt{\pi}}H_{2n+1}(x)H_{2n+1}(-f)=$$
$$=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-jn\frac{\pi}{2}}}{2^{2n+1}(2n+1)!\sqrt{\pi}}H_{2n+1}(x)H_{2n+1}(f)=-O(x,f)$$

Οπότε ο γενικευμένος πυρήνας Hartley και ο γενικευμένος πυρήνας Fourier γράφονται ως εξής:

$$K_\alpha^H(x,f)=[E(x,f)+O(x,f)]\mathrm{e}^{-\pi(x^2+f^2)}$$
$$K_\alpha^F(x,f)=[E(x,f)+\mathrm{e}^{-j\frac{\alpha\pi}{2}}O(x,f)]\mathrm{e}^{-\pi(x^2+f^2)}$$

Έχοντας όλες αυτές της σχέσεις, μπορούμε εύκολα να συνδέσουμε τους δύο πυρήνες με μία σχέση. Η σχέση αυτή είναι:

$$K_\alpha^H(x,f)=\frac{1+\mathrm{e}^{j\frac{\alpha\pi}{2}}}{2}K_\alpha^F(x,f)+\frac{1-\mathrm{e}^{j\frac{\alpha\pi}{2}}}{2}K_\alpha^F(x,-f)$$

<u>Απόδειξη</u>:

$$\frac{1+\mathrm{e}^{j\frac{\alpha\pi}{2}}}{2}K_\alpha^F(x,f)+\frac{1-\mathrm{e}^{j\frac{\alpha\pi}{2}}}{2}K_\alpha^F(x,-f)=$$
$$=\frac{1}{2}K_\alpha^F(x,f)+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{j\frac{\alpha\pi}{2}}K_\alpha^F(x,f)+\frac{1}{2}K_\alpha^F(x,-f)-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{j\frac{\alpha\pi}{2}}K_\alpha^F(x,-f)=$$

$$= \frac{1}{2}[E(x,f) + \mathrm{e}^{-j\frac{\alpha\pi}{2}} O(x,f)]\mathrm{e}^{-\pi(x^2+f^2)} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{j\frac{\alpha\pi}{2}}[E(x,f) + \mathrm{e}^{-j\frac{\alpha\pi}{2}} O(x,f)]\mathrm{e}^{-\pi(x^2+f^2)} +$$
$$+ \frac{1}{2}[E(x,f) + \mathrm{e}^{-j\frac{\alpha\pi}{2}} O(x,-f)]\mathrm{e}^{-\pi(x^2+(-f)^2)} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{j\frac{\alpha\pi}{2}}[E(x,f) + \mathrm{e}^{-j\frac{\alpha\pi}{2}} O(x,f)]\mathrm{e}^{-\pi(x^2+(-f)^2)} =$$

$$= \mathrm{e}^{-\pi(x^2+f^2)}[\frac{1}{2}E(x,f) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-j\frac{\alpha\pi}{2}} O(x,f)\frac{1}{2}\mathrm{e}^{j\frac{\alpha\pi}{2}} E(x,f) +$$
$$+ \frac{1}{2}O(x,f) + \frac{1}{2}E(x,f) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-j\frac{\alpha\pi}{2}} O(x,f) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-j\frac{\alpha\pi}{2}} E(x,f) + \frac{1}{2}O(x,f)] =$$

$$= \mathrm{e}^{-\pi(x^2+f^2)}[E(x,f) + O(x,f)] = K_\alpha^H(x,f)$$

Χρησιμοποιώντας την αναλυτική έκφραση:

$$K_\alpha^F(x,f) = \sqrt{1 - j\cot a}\ \exp\left\{j\pi\left[(x^2+f^2)\cot a - 2xf\csc a\right]\right\}$$

Έχουμε:

$$K_\alpha^H(x,f) = \frac{1}{2}\sqrt{1 - j\cot a}\ \exp\left\{j\pi\left[(x^2+f^2)\cot a - 2xf\csc a\right]\right\} +$$
$$+ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{j\frac{\alpha\pi}{2}}\sqrt{1 - j\cot a}\ \exp\left\{j\pi\left[(x^2+f^2)\cot a - 2xf\csc a\right]\right\} +$$
$$+ \frac{1}{2}\sqrt{1 - j\cot a}\ \exp\left\{j\pi\left[(x^2+f^2)\cot a + 2xf\csc a\right]\right\} -$$
$$- \frac{1}{2}\mathrm{e}^{j\frac{\alpha\pi}{2}}\sqrt{1 - j\cot a}\ \exp\left\{j\pi\left[(x^2+f^2)\cot a + 2xf\csc a\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1 - j\cot a}\ \exp\left\{j\pi(x^2+f^2)\cot a\right\} \cdot$$
$$\cdot \{\exp(-2\pi jxf\csc a) + \mathrm{e}^{j\frac{\alpha\pi}{2}}\exp(-2\pi jxf\csc a) +$$
$$+ \exp(2\pi jxf\csc a) - \mathrm{e}^{j\frac{\alpha\pi}{2}}\exp(2\pi jxf\csc a)\} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1 - j\cot a}\ \exp\left\{j\pi(x^2+f^2)\cot a\right\} \cdot$$
$$\cdot \{\cos(-2\pi xf\csc a) + j\sin(-2\pi xf\csc a) + \cos(2\pi xf\csc a) + j\sin(2\pi xf\csc a) +$$
$$+ \mathrm{e}^{j\frac{\alpha\pi}{2}}[\cos(-2\pi xf\csc a) + j\sin(-2\pi xf\csc a) - \cos(2\pi xf\csc a) - j\sin(2\pi xf\csc a)]\}$$

$$\Rightarrow \qquad K_\alpha^H(x,f) = \frac{\sqrt{1 - j\cot a}}{2}\ \exp\left\{j\pi(x^2+f^2)\cot a\right\} \cdot$$
$$\cdot \left[2\cos(2\pi xf\csc a) - \mathrm{e}^{j\frac{\alpha\pi}{2}}\{2j\sin(2\pi xf\csc a)\}\right]$$

Οπότε ο κλασματικός μετασχηματισμός Hartley είναι:

$$\mathcal{H}^\alpha[f(x)] = \frac{\sqrt{1 - j\cot a}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{j\pi(x^2+f^2)\cot a\right\} \cdot$$
$$\cdot \left[2\cos(2\pi xf\csc a) - \mathrm{e}^{j\frac{\alpha\pi}{2}}\{2j\sin(2\pi xf\csc a)\}\right] f(x)\mathrm{d}x$$

Κεφάλαιο 4

Γενικευμένοι τελεστές cosine Fourier και sine Fourier

Εδώ θα δούμε την γενίκευση τον τελεστών cosine Fourier FrF_cT και sine Fourier FrF_sT . Η γενίκευση δεν θα γίνει με την μέθοδο που είδαμε στα προηγούμενα. Θα φανεί λίγο αυθαίρετη στην αρχή, αλλά θα δούμε ότι ικανοποιεί τις τέσσερις ιδιότητες που είναι ικανές και αναγκαίες κάθε γενικευμένου τελεστή. Θα ξεκινήσουμε με τους κλασσικούς ορισμούς και κάποιες ιδιότητες.

4.1 Ορισμοί

Η δράση του τελεστή cosine Fourier πάνω σε μία συνάρτηση είναι:

$$\mathcal{F}_c \cdot f \quad \mapsto \quad \int_0^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)\mathrm{d}x$$

και συμβολίζεται με την μορφή:

$$\mathcal{F}_c[f(x)] = \int_0^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)\mathrm{d}x = F_c(\omega)$$

Και η δράση του τελεστή sine Fourier πάνω σε μία συνάρτηση είναι:

$$\mathcal{F}_s \cdot f \quad \mapsto \quad \int_0^{+\infty} f(x)\sin(\omega x)\mathrm{d}x$$

και συμβολίζεται με την μορφή:

$$\mathcal{F}_s[f(x)] = \int_0^{+\infty} f(x)\sin(\omega x)\mathrm{d}x = F_s(\omega)$$

4.1.1 Ιδιότητες των F$_c$T και F$_s$T

Για τους F$_c$T και F$_s$T ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1.Γραμμικότητα

Αν υποθέτουμε για τις συναρτήσεις $f_i(x)$ ότι:

$$f_i(x) \xleftrightarrow{\mathcal{F}_c} F_{ci}(\omega) \qquad ,\forall \;\; i \in \mathbb{N}$$

,τότε ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x) \overset{\mathcal{F}_c}{\longleftrightarrow} \sum_{i=1}^{n} c_i F_{ci}(\omega) \equiv F_c(\omega) \qquad , n \in \mathbb{N}$$

<u>Απόδειξη</u>:

Ο FT του αθροίσματος είναι:

$$F_c(\omega) = \int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x) \cos(x) \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_0^{+\infty} f_i(x) \cos(x) \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad F_c(\omega) = \sum_{i=1}^{n} c_i F_{ci}(\omega)$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}_c\left[\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x)\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i F_{ci}(\omega)$$

όπου:

$$F_{ci}(\omega) = \int_0^{+\infty} f_i(x) \cos(x) \mathrm{d}x$$

Ομοίως για τον F_sT έχουμε:

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}_s\left[\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x)\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i F_{si}(\omega)$$

2.Κλιμάκωση στο χρόνο

Αν υποθέτουμε για τη συνάρτηση $f(x)$ ότι:

$$f(x) \overset{\mathcal{F}_c}{\longleftrightarrow} F_c(\omega)$$

και:

$$f(x) \overset{\mathcal{F}_s}{\longleftrightarrow} F_s(\omega)$$

,τότε ισχύει:

$$\mathcal{F}_{c/s}[f(ax)] = \frac{1}{a} F_{c/s}(\frac{\omega}{a}), \quad a \in \mathbb{R} > 0$$

<u>Απόδειξη</u>:

$$\mathcal{F}_c[f(ax)] = \int_0^{+\infty} f(ax) \cos(\omega x) \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(t) \cos(\frac{\omega}{a} t) \mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}_c[f(ax)] = \frac{1}{a} F_c(\frac{\omega}{a})$$

Ομοίως δείχνουμε και την περίπτωση του F_sT.

3.Ολίσθηση στη συχνότητα

Αν ω_0 μία πραγματική σταθερά, τότε ισχύουν:

$$\mathcal{F}_c[f(x) \cos(\omega_0 x)] = \frac{1}{2}[F_c(\omega + \omega_0) + F_c(\omega - \omega_0)]$$

$$\mathcal{F}_s[f(x)\cos(\omega_0 x)] = \frac{1}{2}[F_s(\omega+\omega_0) + F_s(\omega-\omega_0)]$$
$$\mathcal{F}_c[f(x)\sin(\omega_0 x)] = \frac{1}{2}[F_c(\omega+\omega_0) - F_c(\omega-\omega_0)]$$
$$\mathcal{F}_s[f(x)\sin(\omega_0 x)] = \frac{1}{2}[F_s(\omega+\omega_0) - F_s(\omega-\omega_0)]$$

Απόδειξη:

Έχουμε τις εξής σχέσεις:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_c[f(x)\cos(\omega_0 x)] &= \int_0^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)\cos(\omega_0 x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} f(x)[\cos(\omega x+\omega_0 x) + \sin(\omega x)\sin(\omega_0 x)]\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} f(x)\cos(\omega x+\omega_0 x)\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} f(x)\sin(\omega x)\sin(\omega_0 x)\mathrm{d}x \\
\Rightarrow \quad \mathcal{F}_c[f(x)\cos(\omega_0 x)] &= F_c(\omega+\omega_0) + \mathcal{F}_s[f(x)\sin(\omega_0 x)]
\end{aligned}$$

Αφού ισχύει $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$. Επίσης ισχύουν και οι εξής τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$
$$\sin(a+b) = \cos a\sin b + \sin a\cos b$$
$$\sin(a-b) = \cos a\sin b - \sin a\cos b$$

Οπότε παρόμοια μπορούμε να εξάγουμε τα παρακάτω:

$$\mathcal{F}_c[f(x)\cos(\omega_0 x)] = F_c(\omega-\omega_0) - \mathcal{F}_s[f(x)\sin(\omega_0 x)]$$
$$\mathcal{F}_c[f(x)\sin(\omega_0 x)] = F_s(\omega+\omega_0) - \mathcal{F}_s[f(x)\cos(\omega_0 x)]$$
$$\mathcal{F}_c[f(x)\sin(\omega_0 x)] = F_s(\omega-\omega_0) + \mathcal{F}_s[f(x)\cos(\omega_0 x)]$$
$$\mathcal{F}_s[f(x)\cos(\omega_0 x)] = F_s(\omega+\omega_0) - \mathcal{F}_c[f(x)\sin(\omega_0 x)]$$
$$\mathcal{F}_s[f(x)\cos(\omega_0 x)] = -F_s(\omega-\omega_0) + \mathcal{F}_c[f(x)\sin(\omega_0 x)]$$
$$\mathcal{F}_s[f(x)\sin(\omega_0 x)] = -F_c(\omega+\omega_0) + \mathcal{F}_c[f(x)\cos(\omega_0 x)]$$
$$\mathcal{F}_s[f(x)\sin(\omega_0 x)] = F_c(\omega-\omega_0) - \mathcal{F}_c[f(x)\cos(\omega_0 x)]$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα, έχουμε τα ζητούμενα.

4.1.2 Σχέσει με τον FT

Για συναρτήσεις που ορίζονται στο διάστημα $[0,\infty)$ αποδεικνύονται οι δύο παρακάτω σχέσεις που συνδέουν τους F_cT και F_sT με τον FT:

$$\mathcal{F}_c[f(x)] = \mathcal{F}\left[\frac{f(x)+f(-x)}{2}\right]$$
$$\mathcal{F}_s[f(x)] = \mathcal{F}\left[-\frac{f(x)-f(-x)}{2j}\right]$$

Απόδειξη 1:

$$\mathcal{F}\left[\frac{f(x)+f(-x)}{2}\right]=\int_0^{+\infty}\frac{f(x)+f(-x)}{2}\mathrm{e}^{-j\omega x}\mathrm{d}x=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-j\omega x}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}f(-x)\mathrm{e}^{-j\omega x}\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}f(x)\cos(-\omega x)\mathrm{d}x+j\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}f(x)\sin(-\omega x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}f(-x)\mathrm{e}^{-j\omega x}\mathrm{d}(-x)$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}f(x)\cos(\omega x)\mathrm{d}x-\frac{j}{2}\int_0^{+\infty}f(x)\sin(\omega x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_\infty^{0}f(x_0)\mathrm{e}^{j\omega x_0}\mathrm{d}x_0$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}f(x)\cos(\omega x)\mathrm{d}x-\frac{j}{2}\int_0^{\infty}f(x)\sin(\omega x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}f(x_0)\mathrm{e}^{j\omega x_0}\mathrm{d}x_0$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}f(x)\cos(\omega x)\mathrm{d}x-j\frac{1}{2}\int_0^{\infty}f(x)\sin(\omega x)\mathrm{d}x+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}f(x)\cos(\omega x)\mathrm{d}x+j\frac{1}{2}\int_0^{\infty}f(x)\sin(\omega x)\mathrm{d}x=$$

$$=\int_0^{+\infty}f(x)\cos(\omega x)\mathrm{d}x=\mathcal{F}_c[f(x)]$$

Απόδειξη 2:

$$\mathcal{F}\left[-\frac{f(x)-f(-x)}{2j}\right]=\int_0^{+\infty}\left(-\frac{f(x)-f(-x)}{2j}\right)\mathrm{e}^{-j\omega x}\mathrm{d}x=$$
$$=-\frac{1}{2j}\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-j\omega x}\mathrm{d}x+\frac{1}{2j}\int_0^{+\infty}f(-x)\mathrm{e}^{-j\omega x}\mathrm{d}x=$$

$$=-\frac{1}{2j}\int_0^{+\infty}f(x)\cos(-\omega x)\mathrm{d}x-j\frac{1}{2j}\int_0^{+\infty}f(x)\sin(-\omega x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2j}\int_0^{+\infty}f(-x)\mathrm{e}^{-j\omega x}\mathrm{d}(-x)$$
$$=-\frac{1}{2j}\int_0^{+\infty}f(x)\cos(\omega x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}f(x)\sin(\omega x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2j}\int_\infty^{0}f(x_0)\mathrm{e}^{j\omega x_0}\mathrm{d}x_0$$
$$=-\frac{1}{2j}\int_0^{+\infty}f(x)\cos(\omega x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}f(x)\sin(\omega x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2j}\int_0^{\infty}f(x_0)\mathrm{e}^{j\omega x_0}\mathrm{d}x_0$$

$$=-\frac{1}{2j}\int_0^{+\infty}f(x)\cos(\omega x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}f(x)\sin(\omega x)\mathrm{d}x+$$
$$+\frac{1}{2j}\int_0^{\infty}f(x)\cos(\omega x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}f(x)\sin(\omega x)\mathrm{d}x=$$

$$=\int_0^{+\infty}f(x)\sin(\omega x)\mathrm{d}x=\mathcal{F}_s[f(x)]$$

4.2 Γενίκευση των τελεστών cosine Fourier και sine Fourier

Οι γενικευμένοι τελεστές cosine Fourier και sine Fourier είναι:

$$\mathcal{F}_c^{\alpha}[f(x)] = \mathcal{F}^{\alpha}\left[\frac{f(x)+f(-x)}{2^{\alpha}}\right]$$

$$\mathcal{F}_s^{\alpha}[f(x)] = \mathcal{F}^{\alpha}\left[\frac{f(x)-f(-x)}{(-2j)^{\alpha}}\right]$$

Απόδειξη 1:

Για $\alpha = 0$:

$$\mathcal{F}_c^{0}[f(x)] = \mathcal{F}^{0}\left[\frac{f(x)+f(-x)}{2^{0}}\right] = f(x) - f(-x)$$

Αλλά για $x < 0$ είναι $f(x) = 0$, άρα:

$$\mathcal{F}_c^{0}[f(x)] = f(x)$$

Για $\alpha = 1$:

$$\mathcal{F}_c^{1}[f(x)] = \mathcal{F}^{1}\left[\frac{f(x)+f(-x)}{2^{1}}\right] = \mathcal{F}\left[\frac{f(x)+f(-x)}{2}\right]$$

Που ισχύει όπως δείξαμε και πριν.

Για $\alpha = \beta + \gamma$:

$$\mathcal{F}_c^{\beta+\gamma}[f(x)] = \mathcal{F}^{\beta+\gamma}\left[\frac{f(x)+f(-x)}{2^{\beta+\gamma}}\right] =$$

Αλλά στον Fourier ισχύουν:

$$\mathcal{F}_c^{\beta+\gamma} = \mathcal{F}_c^{\beta}\mathcal{F}_c^{\gamma} = \mathcal{F}_c^{\gamma}\mathcal{F}_c^{\beta}$$

Οπότε:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c^{\beta+\gamma}[f(x)] &= \mathcal{F}_c^{\beta}\mathcal{F}_c^{\gamma}\left[\frac{f(x)+f(-x)}{2^{\beta}2^{\gamma}}\right] = \frac{1}{2^{\beta}}\mathcal{F}_c^{\beta}\frac{1}{2^{\gamma}}\mathcal{F}_c^{\gamma}\left[f(x)+f(-x)\right] \\ &= \frac{1}{2^{\gamma}}\mathcal{F}_c^{\gamma}\frac{1}{2^{\beta}}\mathcal{F}_c^{\beta}\left[f(x)+f(-x)\right] = \mathcal{F}_c^{\gamma}\mathcal{F}_c^{\beta}\left[\frac{f(x)+f(-x)}{2^{\beta}2^{\gamma}}\right]\end{aligned}$$

Απόδειξη 2:

Για $\alpha = 0$:

$$\mathcal{F}_s^{0}[f(x)] = \mathcal{F}^{0}\left[\frac{f(x)-f(-x)}{(-2j)^{0}}\right] = f(x) - f(-x)$$

Αλλά όπως και πριν, για $x < 0$ είναι $f(x) = 0$, άρα:

$$\mathcal{F}_s^{0}[f(x)] = f(x)$$

Για $\alpha = 1$:

$$\mathcal{F}_s^1[f(x)] = \mathcal{F}^1\left[\frac{f(x) - f(-x)}{(-2j)^1}\right] = \mathcal{F}\left[-\frac{f(x) - f(-x)}{2j}\right]$$

Που ισχύει όπως δείξαμε και πριν.

Για $\alpha = \beta + \gamma$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_s^{\beta+\gamma}[f(x)] &= \mathcal{F}^{\beta+\gamma}\left[\frac{f(x) - f(-x)}{(-2j)^{\beta+\gamma}}\right] = \mathcal{F}_s^{\beta}\mathcal{F}_s^{\gamma}\left[\frac{f(x) - f(-x)}{(-2j)^{\beta}(-2j)^{\gamma}}\right] \\
&= \frac{1}{(-2j)^{\beta}}\mathcal{F}_s^{\beta}\frac{1}{(-2j)^{\gamma}}\mathcal{F}_s^{\gamma}\left[f(x) - f(-x)\right] \\
&= \frac{1}{(-2j)^{\gamma}}\mathcal{F}_s^{\gamma}\frac{1}{(-2j)^{\beta}}\mathcal{F}_s^{\beta}\left[f(x) - f(-x)\right] = \mathcal{F}_s^{\gamma}\mathcal{F}_s^{\beta}\left[\frac{f(x) + f(-x)}{(-2j)^{\beta}(-2j)^{\gamma}}\right]
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την αναλυτική έκφραση του πυρήνα Fourier έχουμε:

$$\mathcal{F}_c[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1 - j\cot a}\ \exp\left\{j\pi\left[(x^2 + f^2)\cot a - 2xf\csc a\right]\right\}\frac{f(x) + f(-x)}{2^{\alpha}}\mathrm{d}x$$

Και:

$$\mathcal{F}_s[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1 - j\cot a}\ \exp\left\{j\pi\left[(x^2 + f^2)\cot a - 2xf\csc a\right]\right\}\frac{f(x) - f(-x)}{(-2j)^{\alpha}}\mathrm{d}x$$

Πρέπει να αποφεύγουμε την σύγχυση μεταξύ των a και α, που μπορεί να γίνει εύκολα.

Κεφάλαιο 5

Γενικευμένοι τελεστές σε n-D

Θα εξετάσουμε τώρα όλες της προηγούμενες περιπτώσεις γενικευμένων τελεστών ή κλασματικών μετασχηματισμών για περισσότερες διαστάσεις. Οι επεκτάσεις αυτές είναι εννοιολογικά εύκολες, καθώς υπάρχει αντιστοιχία με τις κλασσικές περιπτώσεις. Το μόνο αρνητικό είναι το μέγεθος των εκφράσεων που προκύπτουν, το οποίο από την κλασσική περίπτωση κιόλας είναι μεγάλο.

5.1 Γενικευμένος τελεστής Fourier σε n-D (n-DFrFT)

5.1.1 Κλασσική περίπτωση

Ο τελεστής Fourier σε δύο διαστάσεις ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{F}_{2D} \cdot f \quad \mapsto \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) \mathrm{e}^{-j\omega_x x} \mathrm{e}^{-j\omega_y y} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

Και συμβολίζεται με την μορφή:

$$\mathcal{F}_{2D}[f(x,y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) \mathrm{e}^{-j\omega_x x} \mathrm{e}^{-j\omega_y y} \mathrm{d}x \mathrm{d}y = F_{2D}(\omega_x, \omega_y)$$

Και φυσικά στις τρεις διαστάσεις έχουμε:

$$\mathcal{F}_{3D} \cdot f \quad \mapsto \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y,z) \mathrm{e}^{-j\omega_x x} \mathrm{e}^{-j\omega_y y} \mathrm{e}^{-j\omega_z z} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

$$\mathcal{F}_{3D}[f(x,y,z)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y,z) \mathrm{e}^{-j\omega_x x} \mathrm{e}^{-j\omega_y y} \mathrm{e}^{-j\omega_z z} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z = F_{3D}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$$

Οπότε φαίνεται και εύλογος ο ορισμός για n διαστάσεις:

$$\mathcal{F}_{nD}[f(\overline{x})] = \int_{\mathbb{R}_n} f(\overline{x}) \mathrm{e}^{-j\sum_{i=0}^{n} x_i \omega_i} \mathrm{d}\overline{x} = F_{nD}(\overline{\omega})$$

5.1.2 Γενική περίπτωση

Ανάλογα με την κλασσική περίπτωση, έχουμε για την γενική σε δύο και τρεις διαστάσεις:

$$\mathcal{F}_{2D}^{\alpha\beta}[f(x,y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) K_{\alpha}^{F}(x,f_x) K_{\beta}^{F}(y,f_y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

$$\mathcal{F}_{3D}^{\alpha\beta\gamma}[f(x,y,z)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y,z) K_{\alpha}^{F}(x,f_x) K_{\beta}^{F}(y,f_y) K_{\gamma}^{F}(z,f_z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

Όπου:

$$K_{\alpha}^{F}(x,f_x)=\sqrt{1-j\cot a}\ \exp\left\{j\pi\left[(x^2+f_x^2)\cot a-2xf_x\csc a\right]\right\}$$

$$K_{\beta}^{F}(y,f_y)=\sqrt{1-j\cot b}\ \exp\left\{j\pi\left[(y^2+f_y^2)\cot b-2yf_y\csc b\right]\right\}$$

$$K_{\gamma}^{F}(z,f_z)=\sqrt{1-j\cot g}\ \exp\left\{j\pi\left[(z^2+f_z^2)\cot g-2zf_z\csc g\right]\right\}$$

Και:

$$a=\alpha\frac{\pi}{2}\quad,\quad b=\beta\frac{\pi}{2}\quad,\quad g=\gamma\frac{\pi}{2}$$

Παρατηρούμε ότι κάθε φορά που προσθέτουμε μια διάσταση μπορούμε να θεωρήσουμε και μία ακόμη παράμετρο, αυτή της κλασματικής τάξης. Αυτό μπορεί να αποτελέσει εργαλείο για την λύση μαθηματικών προβλημάτων. Για την ειδική περίπτωση που όλες οι κλασματικές τάξης είναι ίσες, έχουμε για δύο και τρεις διαστάσεις αντίστοιχα:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{2D}^{\alpha}[f(x,y)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)K_{\alpha}^{F}(x,f_x)K_{\alpha}^{F}(y,f_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\\&=\left(\sqrt{1-j\cot a}\right)^2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\exp\left\{j\pi\left[(x^2+y^2+f_x^2+f_y^2)\cot a-2(xf_x+yf_y)\csc a\right]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$\mathcal{F}_{3D}^{\alpha}[f(x,y,z)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y,z)K_{\alpha}^{F}(x,f_x)K_{\alpha}^{F}(y,f_y)K_{\alpha}^{F}(z,f_z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$$

$$\begin{aligned}=\left(\sqrt{1-j\cot a}\right)^3\int_{\mathbb{R}_3}&f(x,y,z)\cdot\\&\cdot\exp\left\{j\pi\left[(x^2+y^2+z^2+f_x^2+f_y^2+f_z^2)\cot a-2(xf_x+yf_y+zf_z)\csc a\right]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\end{aligned}$$

Οπότε για n διαστάσεις ο γενικευμένος τελεστής Fourier είναι:

$$\mathcal{F}_{nD}^{\overline{\alpha}}[f(\overline{x})]=\int_{\mathbb{R}_n}f(\overline{x})\prod_{i=1}^{n}K_{\alpha_i}^{F}(x_i,f_i)\mathrm{d}\overline{x}$$

Και για όλες τις κλασματικές τάξεις ίσες:

$$\mathcal{F}_{nD}^{\alpha}[f(\overline{x})]=\left(\sqrt{1-j\cot a}\right)^n\int_{\mathbb{R}_n}f(\overline{x})\exp\left\{j\pi\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+f_i^2)\cot a-2\left(\sum_{i=1}^{n}x_if_i\right)\csc\alpha\right]\right\}\mathrm{d}\overline{x}$$

5.2 Γενικευμένος τετραδικός τελεστής Fourier (FrQFT)

Επί τι ευκαιρία να μιλήσουμε για έναν τελεστή που μοιάζει πολύ με τον τελεστή Fourier. Αυτός είναι ο τετραδικός τελεστής Fourier (QFT) και εμπεριέχει στοιχεία από την τετραδική άλγεβρα (quaternionic algebra). Ο λόγος που τον βάζουμε εδώ είναι διότι αυτός εξορισμού έχει δύο διαστάσεις. Πριν δώσουμε τους ορισμούς θα κάνουμε μια εισαγωγή στην τετραδική άλγεβρα.

5.2.1 Τετραδική άλγεβρα

Η τετραδική άλγεβρα έχει σαν στοιχεία τους φανταστικούς αριθμούς i, j, k για τους οποίους ισχύει:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = jki = kij = -ikj = -jik = -kji = -1$$

,όπου ένας τετραδικός αριθμός είναι:

$$z = w + ai + bj + ck \quad , \qquad w, a, b, c \in \mathbb{R}$$

Ιδιότητες:

Έστω δύο τετραδικοί αριθμοί $z_1 = w_1 + a_1 i + b_1 j + c_1 k$ και $z_2 = w_2 + a_2 i + b_2 j + c_2 k$, ισχύει:

<u>πρόσθεση:</u>

$$z_1 + z_2 = (w_1 + w_2) + (a_1 + a_2)i + (b_1 + b_2)j + (c_1 + c_2)k$$

<u>πολλαπλασιασμός:</u>

$$z_1 z_2 = (w_1 + a_1 i + b_1 j + c_1 k)(w_2 + a_2 i + b_2 j + c_2 k) =$$

$$= w_1 w_2 - a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 + (w_1 a_1 + a_1 w_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2)i + \\ + (w_1 b_2 - a_1 c_2 + b_1 w_2 + c_1 a_2)j + (w_1 c_2 + a_1 b_2 - b_1 a_2 + w_2 c_1)k$$

<u>πολλαπλασιασμός κατά Hilbert:</u>

$$z_1 z_2 = w_1 w_2 + a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$

<u>μέτρο:</u>

$$|z| = \sqrt{w^2 + a^2 + b^2 + c^2}$$

<u>εκθετική μορφή:</u>

Αν ορίσουμε έναν τετραδικό χώρο αντίστοιχο με εκείνο του μιγαδικού επιπέδου και ορίσουμε της γωνίες θ, ϕ και ψ ως τις γωνίες που σχηματίζονται μεταξύ του πραγματικού άξονα και των φανταστικών i, j, k αντίστοιχα, τότε εξάγεται η εκθετική μορφή τετραδικού:

$$z = |z| \mathrm{e}^{i\theta + j\phi + k\psi} = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + j\sin\phi)(\cos\psi + k\sin\psi) =$$

$$= |z|[(\cos\theta\cos\phi\cos\psi - \sin\theta\sin\phi\sin\psi) + (\cos\theta\sin\phi\sin\psi + \sin\theta\cos\phi\cos\psi)i + \\ + (\cos\theta\sin\phi\cos\psi - \sin\theta\cos\phi\sin\psi)j + (\cos\theta\cos\phi\sin\psi + \sin\theta\sin\phi\cos\psi)k]$$

<u>συζυγία:</u>

Ο συζυγής τετραδικός ενός τετραδικού αριθμού είναι:

$$\overline{z} = w - ai - bj - ck$$

Και ισχύουν οι εξής δύο σχέσεις:

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

τετραδική ομάδα:

Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το παρακάτω σύνολο αποτελεί ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό:

$$G = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$$

Πίνακας της ομάδας G:

	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	k	$-k$	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	$-k$	k	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Επίσης έχουμε τις υποομάδες:

$$H_1 = \{1, -1, i, -i\} \quad , \quad H_2 = \{1, -1, j, -j\} \quad , \quad H_3 = \{1, -1, k, -k\}$$

5.2.2 Τετραδικός τελεστής Fourier

Ορίζουμε τον τετραδικό τελεστή Fourier QFT ως εξής:

$$\mathcal{F}_q[f(x,y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{e}^{-i\omega_x x - j\omega_y y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Αλλά:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-i\omega_x x - j\omega_y y} &= [\cos(\omega_x x) - i\sin(\omega_x x)][\cos(\omega_y y) - j\sin(\omega_y y)] \\
&= \cos(\omega_x x)\cos(\omega_y y) - j\cos(\omega_x x)\sin(\omega_y y) - i\sin(\omega_x x)\cos(\omega_y y) + k\sin(\omega_x x)\sin(\omega_y y)
\end{aligned}$$

Οπότε ορίζοντας:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\cos(\omega_x x)\cos(\omega_y y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = CC(\omega_x, \omega_y)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\cos(\omega_x x)\sin(\omega_y y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = CS(\omega_x, \omega_y)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\sin(\omega_x x)\cos(\omega_y y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = SC(\omega_x, \omega_y)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\sin(\omega_x x)\sin(\omega_y y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = SS(\omega_x, \omega_y)$$

Έχουμε:

$$\mathcal{F}_q[f(x,y)] = CC(\omega_x,\omega_y) - iSC(\omega_x,\omega_y) - jCS(\omega_x,\omega_y) + kSS(\omega_x,\omega_y)$$

Και κάποιες ιδιότητες (χωρίς απόδειξη):

Για $\mathcal{F}_q[f(x,y)] = F_q(\omega_x,\omega_y)$ έχουμε:

Ολίσθηση:

$$\mathcal{F}_q[f(x-d_x, y-d_y)] = \mathrm{e}^{-i\omega_x d_x - j\omega_y d_y} F_q(\omega_x,\omega_y)$$

Διαμόρφωση:

$$\mathcal{F}_q[\mathrm{e}^{i\omega_0 x + j\omega_0 y} f(x,y)] = F_q(\omega_x - \omega_0, \omega_y - \omega_0)$$

Παραγώγιση:

Για $n = p + r \quad , \quad n, p, r \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{F}_q\left[\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^p \partial y^r}\right] = (2\pi)^n (i\omega_x)^p (j\omega_y)^r F_q(\omega_x,\omega_y)$$

Θεώρημα του Rayleigh:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |F_q(\omega_x,\omega_y)|^2 \mathrm{d}\omega_x \mathrm{d}\omega_y$$

5.2.3 Γενίκευση τετραδικού τελεστή Fourier

Ο γενικευμένος τετραδικός τελεστής Fourier ορίζεται με τρόπο που πλέον πρέπει να μας φαίνεται λογικός:

$$\mathcal{F}_q^{\alpha\beta}[f(x,y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) K_{i,\alpha}^F(x,f_x) K_{j,\beta}^F(y,f_y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Αναλυτικά:

$$\mathcal{F}_q^{\alpha\beta}[f(x,y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\sqrt{1 - i\cot a}\ \exp\left\{i\pi\left[(x^2+f_x^2)\cot a - 2xf_x\csc a\right]\right\}\cdot$$
$$\cdot\sqrt{1 - j\cot b}\ \exp\left\{j\pi\left[(y^2+f_y^2)\cot b - 2yf_y\csc b\right]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \sqrt{1 - i\cot a}\sqrt{1 - j\cot b}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\cdot$$
$$\cdot\exp\left\{i\pi\left[(x^2+f_x^2)\cot a - 2xf_x\csc a\right] + j\pi\left[(y^2+f_y^2)\cot b - 2yf_y\csc b\right]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Για ίσες κλασματικές τάξεις δεν έχουμε καμία σπουδαία συμπύκνωση του τύπου:

$$\mathcal{F}_q^\alpha[f(x,y)] = \left(\sqrt{1 - i\cot a}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\cdot$$
$$\cdot \exp\left\{\pi\left[i(x^2+f_x^2)+j(y^2+f_y^2)\right]\cot a - 2\pi(ixf_x+jyf_y)\csc a\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

5.3 Γενικευμένος τελεστής Hartley σε n-D (n-DFrHT)

5.3.1 Κλασσική περίπτωση

Ο τελεστής Hartley σε δύο διαστάσεις ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{H}_{2D}\cdot f \quad\mapsto\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{cas}(x\omega_x)\mathrm{cas}(y\omega_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Και συμβολίζεται με την μορφή:

$$\mathcal{H}_{2D}[f(x,y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{cas}(x\omega_x)\mathrm{cas}(y\omega_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = H_{2D}(\omega_x,\omega_y)$$

Και στις τρεις διαστάσεις έχουμε:

$$\mathcal{H}_{3D}\cdot f \quad\mapsto\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y,z)\mathrm{cas}(x\omega_x)\mathrm{cas}(y\omega_y)\mathrm{cas}(z\omega_z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\mathcal{H}_{3D}[f(x,y,z)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y,z)\mathrm{cas}(x\omega_x)\mathrm{cas}(y\omega_y)\mathrm{cas}(z\omega_z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= H_{3D}(\omega_x,\omega_y,\omega_z)$$

Οπότε με την ίδια λογική για n διαστάσεις έχουμε:

$$\mathcal{H}_{nD}[f(\overline{x})] = \int_{\mathbb{R}_n} f(\overline{x})\prod_{i=1}^{n}\mathrm{cas}(x_i\omega_i)\mathrm{d}\overline{x} = H_{nD}(\overline{\omega})$$

5.3.2 Γενική περίπτωση

Ανάλογα με την κλασσική περίπτωση, έχουμε για την γενική σε δύο και τρεις διαστάσεις:

$$\mathcal{H}_{2D}^{\alpha\beta}[f(x,y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)K_\alpha^H(x,f_x)K_\beta^H(y,f_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\mathcal{H}_{3D}^{\alpha\beta\gamma}[f(x,y,z)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y,z)K_\alpha^H(x,f_x)K_\beta^H(y,f_y)K_\gamma^H(z,f_z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Όπου:

$$K_\alpha^H(x,f_x) = \frac{\sqrt{1-j\cot a}}{2}\ \exp\left\{j\pi(x^2+f_x^2)\cot a\right\}\left[2\cos(2\pi xf_x\csc a) - \mathrm{e}^{j\frac{\alpha\pi}{2}}\{2j\sin(2\pi xf_x\csc a)\}\right]$$

$$K_\beta^H(x,f_x) = \frac{\sqrt{1-j\cot b}}{2}\ \exp\left\{j\pi(y^2+f_y^2)\cot b\right\}\left[2\cos(2\pi yf_y\csc b) - \mathrm{e}^{j\frac{\beta\pi}{2}}\{2j\sin(2\pi yf_y\csc b)\}\right]$$

$$K_\gamma^H(z,f_z) = \frac{\sqrt{1-j\cot g}}{2}\ \exp\left\{j\pi(z^2+f_z^2)\cot g\right\}\left[2\cos(2\pi zf_z\csc g) - \mathrm{e}^{j\frac{\gamma\pi}{2}}\{2j\sin(2\pi zf_z\csc g)\}\right]$$

Με:

$$a = \alpha\frac{\pi}{2} \quad , \quad b = \beta\frac{\pi}{2} \quad , \quad g = \gamma\frac{\pi}{2}$$

Έπεται ο γενικευμένος τελεστής Hartley σε n διαστάσεις:

$$\mathcal{H}_{nD}^{\overline{\alpha}}[f(\overline{x})] = \int_{\mathbb{R}_n} f(\overline{x}) \prod_{i=1}^{n} K_{\alpha_i}^{H}(x_i, f_i)\mathrm{d}\overline{x}$$

Και για όλες τις τάξεις ίσες:

$$\mathcal{H}_{2D}^{\alpha}[f(x,y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)K_{\alpha}^{H}(x,f_x)K_{\alpha}^{H}(y,f_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{1-j\cot a}\right)^2}{2^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\exp\left\{j\pi(x^2+y^2+f_x^2+f_y^2)\cot a\right\}\cdot$$
$$\cdot\left[2\cos(2\pi x f_x \csc a) + 2\cos(2\pi y f_y \csc a) - 2j\mathrm{e}^{j\frac{\alpha\pi}{2}}\left\{\sin(2\pi x f_x \csc a) + \sin(2\pi y f_y \csc a)\right\}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\mathcal{H}_{3D}^{\alpha}[f(x,y,z)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y,z)K_{\alpha}^{H}(x,f_x)K_{\alpha}^{H}(y,f_y)K_{\alpha}^{H}(z,f_z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{1-j\cot a}\right)^3}{2^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y,z)\exp\left\{j\pi(x^2+y^2+z^2+f_x^2+f_y^2+f_z^2)\cot a\right\}\cdot$$
$$\cdot\left[2\cos(2\pi x f_x \csc a) + 2\cos(2\pi y f_y \csc a) + 2\cos(2\pi z f_z \csc a) -\right.$$
$$\left.-2j\mathrm{e}^{j\frac{\alpha\pi}{2}}\left\{\sin(2\pi x f_x \csc a) + \sin(2\pi y f_y \csc a) + \sin(2\pi z f_z \csc a)\right\}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Και:

$$\mathcal{H}_{nD}^{\alpha}[f(\overline{x})] = \int_{\mathbb{R}_n} f(\overline{x}) \prod_{i=1}^{n} K_{\alpha}^{H}(x_i, f_i)\mathrm{d}\overline{x} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{1-j\cot a}\right)^n}{2^n}\int_{\mathbb{R}_n} f(\overline{x})\exp\left\{j\pi\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+f_i^2)\cot a\right\}\cdot$$
$$\cdot\left[2\sum_{i=1}^{n}\cos(2\pi x_i f_i \csc a) - 2j\mathrm{e}^{j\frac{\alpha\pi}{2}}\sum_{i=1}^{n}\sin(2\pi x_i f_i \csc a)\right]\mathrm{d}\overline{x}$$

5.4 Γενικευμένος τελεστής cosine Fourier σε n διαστάσεις

5.4.1 Κλασσική περίπτωση

Ο τελεστής cosine Fourier σε δύο διαστάσεις ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{F}_{2Dc}\cdot f \quad \mapsto \quad \int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} f(x,y)\cos(\omega_x x)\cos(\omega_y y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

και συμβολίζεται με την μορφή:

$$\mathcal{F}_{2Dc}[f(x,y)] = \int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} f(x,y)\cos(\omega_x x)\cos(\omega_y y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = F_{2Dc}(\omega_x,\omega_y)$$

Και στις τρεις διαστάσεις έχουμε:

$$\mathcal{F}_{3Dc} \cdot f \quad \mapsto \quad \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(x,y,z)\cos(\omega_x x)\cos(\omega_y y)\cos(\omega_z z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

και συμβολίζεται με την μορφή:

$$\mathcal{F}_{3Dc}[f(x,y,z)] = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(x,y,z)\cos(\omega_x x)\cos(\omega_y y)\cos(\omega_z z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= F_{3Dc}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$$

Για n διαστάσεις:

$$\mathcal{F}_{nDc}[f(\overline{x})] = \int_{\mathbb{R}_n(0,\infty)} f(\overline{x})\prod_{i=1}^{n}\cos(\omega_i x_i)\mathrm{d}\overline{x} = F_{nDc}(\overline{\omega})$$

5.4.2 Γενική περίπτωση

Ανάλογα με την κλασσική περίπτωση, έχουμε για την γενική, σε δύο και τρεις διαστάσεις:

$$\mathcal{F}_{2Dc}^{\alpha\beta}[f(x,y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x,y)+f(-x,-y)}{2^{\alpha+\beta}} K_\alpha^F(x,f_x)K_\beta^F(y,f_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\mathcal{F}_{3Dc}^{\alpha\beta\gamma}[f(x,y,z)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x,y,z)+f(-x,-y,-z)}{2^{\alpha+\beta+\gamma}} K_\alpha^F(x,f_x)K_\beta^F(y,f_y)K_\gamma^F(z,f_z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Όπου τα $K_\alpha^F(x,f_x), K_\beta^F(y,f_y), K_\gamma^F(z,f_z)$ είναι τα γνωστά μας:

$$K_\alpha^F(x,f_x) = \sqrt{1-j\cot a}\ \exp\left\{j\pi\left[(x^2+f_x^2)\cot a - 2xf_x\csc a\right]\right\}$$

$$K_\beta^F(y,f_y) = \sqrt{1-j\cot b}\ \exp\left\{j\pi\left[(y^2+f_y^2)\cot b - 2yf_y\csc b\right]\right\}$$

$$K_\gamma^F(z,f_z) = \sqrt{1-j\cot g}\ \exp\left\{j\pi\left[(z^2+f_z^2)\cot g - 2zf_z\csc g\right]\right\}$$

Με:

$$a = \alpha\frac{\pi}{2} \quad , \quad b = \beta\frac{\pi}{2} \quad , \quad g = \gamma\frac{\pi}{2}$$

Έτσι ο γενικευμένος τελεστής cosine Fourier σε n διαστάσεις είναι:

$$\mathcal{F}_{nDc}^{\overline{\alpha}}[f(\overline{x})] = \int_{\mathbb{R}_n} \frac{f(\overline{x})+f(-\overline{x})}{2\mathrm{pow}(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i)}\prod_{i=1}^{n}K_{\alpha_i}^F(x_i,f_i)\mathrm{d}\overline{x}$$

Όπου το $\mathrm{pow}(x)$ ορίζεται ως εξής:

$$2\mathrm{pow}(x) = 2^x$$

Και για όλες τις κλασματικές τάξεις ίσες:

$$\mathcal{F}_{2Dc}^{\alpha}[f(x,y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x,y)+f(-x,-y)}{2^{2\alpha}} K_\alpha^F(x,f_x)K_\alpha^F(y,f_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \left(\sqrt{1-j\cot a}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x,y)+f(-x,-y)}{2^{2\alpha}}\cdot$$
$$\cdot \exp\left\{j\pi\left[(x^2+y^2+f_x^2+f_y^2)\cot a - 2(xf_x+yf_y)\csc a\right]\right\} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\mathcal{F}^{\alpha}_{3Dc}[f(x,y,z)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x,y,z)+f(-x,-y,-z)}{2^{3\alpha}}\cdot$$
$$\cdot K^F_\alpha(x,f_x)K^F_\alpha(y,f_y)K^F_\alpha(z,f_z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$= \left(\sqrt{1-j\cot a}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x,y,z)+f(-x,-y,-z)}{2^{3\alpha}}\cdot$$
$$\cdot \exp\left\{j\pi\left[(x^2+y^2+z^2+f_x^2+f_y^2+f_z^2)\cot a - 2(xf_x+yf_y+zf_z)\csc a\right]\right\} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Και αν θεωρήσουμε n διαστάσεις:

$$\mathcal{F}^{\alpha}_{nDc}[f(\overline{x})] = \left(\sqrt{1-j\cot a}\right)^n \int_{\mathbb{R}_n} \frac{f(\overline{x})+f(-\overline{x})}{2^{n\alpha}}\cdot$$
$$\cdot \exp\left\{j\pi\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+f_i^2)\cot a - 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i f_i\right)\csc\alpha\right]\right\} \mathrm{d}\overline{x}$$

5.5 Γενικευμένος τελεστής sine Fourier σε n-D

5.5.1 Κλασσική περίπτωση

Ο τελεστής sine Fourier σε δύο διαστάσεις ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{F}_{2Ds}\cdot f \quad\mapsto\quad \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(x,y)\sin(\omega_x x)\cos(\omega_y y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

και συμβολίζεται με την μορφή:

$$\mathcal{F}_{2Ds}[f(x,y)] = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(x,y)\sin(\omega_x x)\sin(\omega_y y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = F_{2Ds}(\omega_x,\omega_y)$$

Και στις τρεις διαστάσεις έχουμε:

$$\mathcal{F}_{3Ds}\cdot f \quad\mapsto\quad \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(x,y,z)\sin(\omega_x x)\sin(\omega_y y)\sin(\omega_z z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\mathcal{F}_{3Ds}[f(x,y,z)] = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(x,y,z)\sin(\omega_x x)\sin(\omega_y y)\sin(\omega_z z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= F_{3Ds}(\omega_x,\omega_y,\omega_z)$$

Για n διαστάσεις:

$$\mathcal{F}_{nDs}[f(\overline{x})] = \int_{\mathbb{R}_n(0,\infty)} f(\overline{x})\prod_{i=1}^{n}\sin(\omega_i x_i)\mathrm{d}\overline{x} = F_{nDs}(\overline{\omega})$$

5.5.2 Γενική περίπτωση

Ανάλογα με την κλασσική περίπτωση, έχουμε για την γενική, σε δύο και τρεις διαστάσεις:

$$\mathcal{F}_{2Ds}^{\alpha\beta}[f(x,y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x,y)-f(-x,-y)}{(-2j)^{\alpha+\beta}} K_\alpha^F(x,f_x)K_\beta^F(y,f_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\mathcal{F}_{3Ds}^{\alpha\beta\gamma}[f(x,y,z)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x,y,z)-f(-x,-y,-z)}{(-2j)^{\alpha+\beta+\gamma}} \cdot$$
$$\cdot K_\alpha^F(x,f_x)K_\beta^F(y,f_y)K_\gamma^F(z,f_z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Έτσι ο γενικευμένος τελεστής sine Fourier σε n διαστάσεις είναι:

$$\mathcal{F}_{nDs}^{\overline{\alpha}}[f(\overline{x})] = \int_{\mathbb{R}_n} \frac{f(\overline{x})-f(-\overline{x})}{(-2j)\mathrm{pow}(\sum_{i=1}^n \alpha_i)} \prod_{i=1}^n K_{\alpha_i}^F(x_i,f_i)\mathrm{d}\overline{x}$$

Και για όλες τις κλασματικές τάξεις ίσες:

$$\mathcal{F}_{2Ds}^{\alpha}[f(x,y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x,y)-f(-x,-y)}{(-2j)^{2\alpha}} K_\alpha^F(x,f_x)K_\alpha^F(y,f_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \left(\sqrt{1-j\cot a}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x,y)-f(-x,-y)}{(-2j)^{2\alpha}} \cdot$$
$$\cdot \exp\left\{j\pi\left[(x^2+y^2+f_x^2+f_y^2)\cot a - 2(xf_x+yf_y)\csc a\right]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\mathcal{F}_{3Ds}^{\alpha}[f(x,y,z)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x,y,z)-f(-x,-y,-z)}{(-2j)^{3\alpha}} \cdot$$
$$\cdot K_\alpha^F(x,f_x)K_\alpha^F(y,f_y)K_\alpha^F(z,f_z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$= \left(\sqrt{1-j\cot a}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x,y,z)-f(-x,-y,-z)}{(-2j)^{3\alpha}} \cdot$$
$$\cdot \exp\left\{j\pi\left[(x^2+y^2+z^2+f_x^2+f_y^2+f_z^2)\cot a - 2(xf_x+yf_y+zf_z)\csc a\right]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Και αν θεωρήσουμε n διαστάσεις:

$$\mathcal{F}_{nDs}^{\alpha}[f(\overline{x})] = \left(\sqrt{1-j\cot a}\right)^n \int_{\mathbb{R}_n} \frac{f(\overline{x})-f(-\overline{x})}{(-2j)^{n\alpha}} \cdot$$
$$\cdot \exp\left\{j\pi\left[\sum_{i=1}^n (x_i^2+f_i^2)\cot a - 2\left(\sum_{i=1}^n x_i f_i\right)\csc\alpha\right]\right\}\mathrm{d}\overline{x}$$

Κεφάλαιο 6

Γενικευμένος τελεστής της παραγώγου

Σε αυτό το κεφάλαιο της εργασίας, θα αναπτύξουμε τον γενικευμένο τελεστή της παραγώγου ή κλασματική παράγωγος, όπως αλλιώς λέγεται. Η κλασματική παράγωγος είναι η καρδιά της κλασματικής ανάλυσης. Στο πρώτο κεφάλαιο δώσαμε μερικά παραδείγματα της κλασματικής παραγώγου για την ειδική περίπτωση των εκθετικών και πολυωνυμικών συναρτήσεων. Είχαμε υποσχεθεί την πλήρη ανάπτυξη αυτού του ιδιαίτερου τελεστή. Εδώ λοιπόν θα ορίσουμε την κλασματική παράγωγο και θα δείξουμε ότι πληρεί τις απαιτήσεις, που πρέπει να πληρεί κάθε γενικευμένος τελεστής καθώς και την γραμμικότητα. Ο ορισμός θα γίνει χρησιμοποιώντας τον τελεστή Fourier, δημιουργώντας παράλληλα μια σύνθεση μεταξύ αυτών των δύο 'μεγάλων' τελεστών.

6.1 Ορισμός

Θα χρησιμοποιήσουμε την την παρακάτω σχέση (αποδείχτηκε στο κεφάλαιο 2):

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{d}^{(n)}f(x)}{\mathrm{d}x^{(n)}}\right] = (j\omega)^n F(\omega)$$

Με:

$$f(x) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$$

Και με την βοήθεια του αντιστρόφου Fourier έχουμε:

$$\frac{\mathrm{d}^{(n)}f(x)}{\mathrm{d}x^{(n)}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(j\omega)^n F(\omega)\mathrm{e}^{j\omega x}\mathrm{d}\omega$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^{(n)}f(x)}{\mathrm{d}x^{(n)}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(j\omega)^n\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-j\omega x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{e}^{j\omega x}\mathrm{d}\omega$$

Την παραπάνω σχέση την έχουμε αποδείξει στο δεύτερο κεφάλαιο για κάθε n φυσικό αριθμό. Άν θεωρήσουμε αντί αυτού οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό α, τότε έχουμε τον ορισμό της κλασματικής παραγώγου:

$$\frac{\mathrm{d}^{(\alpha)}f(x)}{\mathrm{d}x^{(\alpha)}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(j\omega)^\alpha\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-j\omega x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{e}^{j\omega x}\mathrm{d}\omega$$

Έλεγχος απαιτήσεων:

$$\frac{\mathrm{d}^{(0)} f(x)}{\mathrm{d}x^{(0)}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (j\omega)^0 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-j\omega x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{e}^{j\omega x}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{j\omega x}\mathrm{d}\omega = f(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}^{(1)} f(x)}{\mathrm{d}x^{(1)}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (j\omega)^1 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-j\omega x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{e}^{j\omega x}\mathrm{d}\omega = (j\omega)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{j\omega x}\mathrm{d}\omega$$

Πράγμα που είναι η εφαρμογή της σχέσεις (2.9) για $n = 0$ και $n = 1$. Για α και β πραγματικούς αριθμούς, έχουμε:

$$\frac{\mathrm{d}^{(\alpha)}}{\mathrm{d}x^{(\alpha)}}\left(\frac{\mathrm{d}^{(\beta)} f(x)}{\mathrm{d}x^{(\beta)}}\right) = \frac{\mathrm{d}^{(\alpha)}}{\mathrm{d}x^{(\alpha)}}\left\{\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(j\omega')^{\beta}F(\omega')\mathrm{e}^{j\omega' x}\mathrm{d}\omega'}_{g(x)\ \xleftrightarrow{\mathcal{F}}\ G(\omega)}\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(j\omega)^{\alpha}G(\omega)\mathrm{e}^{j\omega x}\mathrm{d}\omega$$

Όπου:

$$\begin{aligned}
G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x')\mathrm{e}^{-j\omega x'}\mathrm{d}x' &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}(j\omega')^{\beta}F(\omega')\mathrm{e}^{j\omega' x'}\mathrm{d}\omega'\right]\mathrm{e}^{-j\omega x'}\mathrm{d}x' \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}(j\omega')^{\beta}F(\omega')\left\{\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{j(\omega'-\omega)x'}\mathrm{d}x'}_{2\pi\delta(\omega'-\omega)}\right\}\mathrm{d}\omega' \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(j\omega')^{\beta}F(\omega')2\pi\delta(\omega'-\omega)\mathrm{d}\omega' = (j\omega)^{\beta}F(\omega)
\end{aligned}$$

Οπότε :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^{(\alpha)}}{\mathrm{d}x^{(\alpha)}}\left(\frac{\mathrm{d}^{(\beta)} f(x)}{\mathrm{d}x^{(\beta)}}\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(j\omega)^{\alpha}(j\omega)^{\beta}F(\omega)\mathrm{e}^{j\omega x}\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(j\omega)^{\alpha+\beta}F(\omega)\mathrm{e}^{j\omega x}\mathrm{d}\omega = \frac{\mathrm{d}^{(\alpha+\beta)} f(x)}{\mathrm{d}x^{(\alpha+\beta)}}
\end{aligned}$$

Επίσης:

$$\frac{\mathrm{d}^{(\alpha)}}{\mathrm{d}x^{(\alpha)}}\left(\frac{\mathrm{d}^{(\beta)} f(x)}{\mathrm{d}x^{(\beta)}}\right) = \frac{\mathrm{d}^{(\alpha+\beta)} f(x)}{\mathrm{d}x^{(\alpha+\beta)}} = \frac{\mathrm{d}^{(\beta+\alpha)} f(x)}{\mathrm{d}x^{(\beta+\alpha)}} = \frac{\mathrm{d}^{(\beta)}}{\mathrm{d}x^{(\beta)}}\left(\frac{\mathrm{d}^{(\alpha)} f(x)}{\mathrm{d}x^{(\alpha)}}\right)$$

Έλεγχος γραμμικότητας:

Για δύο συναρτήσεις $f_1(x)$, $f_2(x)$ και δύο πραγματικές σταθερές c_1 και c_2 έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^{(\alpha)}}{\mathrm{d}x^{(\alpha)}}[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(j\omega)^{\alpha}[c_1F_1(\omega) + c_2F_2(\omega)]\mathrm{d}\omega = \\
&= c_1\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(j\omega)^{\alpha}F_1(\omega)\mathrm{d}\omega + c_2\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(j\omega)^{\alpha}F_2(\omega)\mathrm{d}\omega
\end{aligned}$$

Όπου:

$$f_1(x) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\omega) \quad , \quad f_2(x) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F_2(\omega)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^{(\alpha)}}{\mathrm{d}x^{(\alpha)}}[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] = c_1 \frac{\mathrm{d}^{(\alpha)}}{\mathrm{d}x^{(\alpha)}} f_1(x) + c_2 \frac{\mathrm{d}^{(\alpha)}}{\mathrm{d}x^{(\alpha)}} f_2(x)$$

Έτσι ο ορισμός που δώσαμε, πληρεί ότι χρειάζεται για να αποτελεί τον γενικευμένο τελεστή της παραγώγου. Μέχρι τώρα όμως δεν αναρωτηθήκαμε αν οι γενικεύσεις που κάναμε για κάθε τελεστή είναι μοναδικές. Για τον γενικευμένο τελεστή της παραγώγου δεν υπάρχει μοναδικότητα στον ορισμό του, καθώς έχουμε την δυνατότητα να ορίσουμε άπειρους γενικευμένους τελεστές που να πληρούν τα παραπάνω και έτσι να είναι και αυτοί κλασματικές παράγωγοι. Ένας άλλος ορισμός ισοδύναμος με τον αρχικό είναι:

$$\frac{\mathrm{d}^{(\alpha)} f(x)}{\mathrm{d}x^{(\alpha)}} = {}_0D_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{(\alpha+1)}} \mathrm{d}t$$

Και αφού:

$$\frac{1}{\Gamma(-\alpha)} = \frac{1}{\pi}\Gamma(\alpha+1)\sin[(\alpha+1)\pi]$$

,έχουμε:

$${}_0D_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\pi}\Gamma(\alpha+1)\sin[(\alpha+1)\pi] \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{(\alpha+1)}} \mathrm{d}t$$

Το μηδενικό αριστερά από το D υπάρχει, διότι ο τελεστής ${}_0D_x^{\alpha}$ είναι μία ειδική περίπτωση της γενικότερης κατηγορίας τελεστών ${}_cD_x^{\alpha}$ που ορίζονται ως εξής:

$${}_cD_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\pi}\Gamma(\alpha+1)\sin[(\alpha+1)\pi] \int_c^x \frac{f(t)}{(x-t)^{(\alpha+1)}} \mathrm{d}t \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

Οι τελεστές ${}_cD_x^{\alpha}$ για κάθε c αποτελούν γενίκευση του τελεστή της παραγώγου. Να πούμε ότι έχουμε εννοήσει ότι η $f(x)$ είναι συνεχής και ακέραιο μέρος του α φορές παραγωγίσιμη αν α θετικό και απόλυτη τιμή συν ένα φορές ολοκληρώσιμη αν α αρνητικό. Επίσης να επισημάνουμε ότι με αυτούς τους ορισμούς κάνουμε ποιο εύκολα υπολογισμούς, αλλά πρέπει να προσέχουμε, διότι σε πολλές περιπτώσεις δεν καλύπτουν όλο το εύρος των τάξεων α με μία σχέση. Τώρα με τον πρώτο ορισμό, θα δείξουμε την ιδιότητα του γενικευμένου τελεστή της παραγώγου για γινόμενο συναρτήσεων.

Θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της συνέλιξης:

$$f(x)g(x) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} H(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega)$$

Και με:

$$f(x) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} F(\omega) \quad , \quad g(x) \overset{F}{\longleftrightarrow} G(\omega)$$

,έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^\alpha[f(x)g(x)]}{\mathrm{d}x^\alpha} &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(j\omega)^\alpha[F(\omega)*G(\omega)]\mathrm{e}^{j\omega x}\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(j\omega)^\alpha\left[\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega')G(\omega-\omega')\mathrm{d}\omega'\right]\mathrm{e}^{j\omega x}\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega')\left[\int_{-\infty}^{+\infty}(j\omega)^\alpha G(\omega-\omega')\mathrm{e}^{j\omega x}\mathrm{d}\omega\right]\mathrm{d}\omega' \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega')\left[\int_{-\infty}^{+\infty}(j\omega)^\alpha G(\underbrace{\omega-\omega'}_{\omega''})\mathrm{e}^{j\omega x}\mathrm{d}\omega\right]\mathrm{d}\omega' \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega')\left[\int_{-\infty}^{+\infty}j^\alpha(\omega'+\omega'')^\alpha G(\omega'')\mathrm{e}^{j\omega'' x}\mathrm{d}\omega''\right]\mathrm{e}^{j\omega' x}\mathrm{d}\omega'
\end{aligned}$$

Όπου χρησιμοποιώντας το διωνυμικό ανάπτυγμα για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(\omega'+\omega'')^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{a}{k}\omega''^k\omega'^{\alpha-k}$$

,έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^\alpha[f(x)g(x)]}{\mathrm{d}x^\alpha} &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega')\left[\int_{-\infty}^{+\infty}j^\alpha\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{a}{k}\omega''^k\omega'^{\alpha-k}G(\omega'')\mathrm{e}^{j\omega'' x}\mathrm{d}\omega''\right]\mathrm{e}^{j\omega' x}\mathrm{d}\omega' \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{a}{k}\int_{-\infty}^{+\infty}(j\omega')^{\alpha-k}F(\omega')\left\{\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(j\omega'')^kG(\omega'')\mathrm{e}^{j\omega'' x}\mathrm{d}\omega''}_{\mathrm{d}^kg(x)/\mathrm{d}x^k}\right\}\mathrm{e}^{j\omega' x}\mathrm{d}\omega' \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{a}{k}\left\{\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(j\omega')^{\alpha-k}F(\omega')\mathrm{e}^{j\omega' x}\mathrm{d}\omega'}_{\mathrm{d}^{\alpha-k}f(x)/\mathrm{d}x^{\alpha-k}}\right\}\frac{\mathrm{d}^kg(x)}{\mathrm{d}x^k}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^\alpha[f(x)g(x)]}{\mathrm{d}x^\alpha} = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{a}{k}\frac{\mathrm{d}^{\alpha-k}f(x)}{\mathrm{d}x^{\alpha-k}}\frac{\mathrm{d}^kg(x)}{\mathrm{d}x^k}$$

Στο πρώτο κεφάλαιο είχαμε κάνει μια αναφορά, στο πως συμπεριφέρεται ο γενικευμένος τελεστής της παραγώγου για $\alpha = -1$. Είχαμε δει, πως για τις ειδικές περιπτώσεις των ορισμών του γενικευμένου τελεστή της παραγώγου για πολυωνυμικές και εκθετικές συναρτήσεις, για $\alpha = -1$, ταυτιζόταν με το αόριστο ολοκλήρωμα. Ήρθε η ώρα να αποδείξουμε και να καθιερώσουμε καθολικά αυτή την υπόθεση. Και πάλι θα χρησιμοποιήσουμε τον αρχικό μας ορισμό.

Έστω λοιπόν ότι:

$$f(x) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$$

Έχουμε:

$$f'(x) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (j\omega)F(\omega) = G(\omega)$$

,και έτσι:

$$\frac{\mathrm{d}^{-1}f'(x)}{\mathrm{d}x^{-1}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(j\omega)^{-1}G(\omega)\mathrm{e}^{j\omega x}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(j\omega)^{-1}(j\omega)F(\omega)\mathrm{e}^{j\omega x}\mathrm{d}\omega$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^{-1}f'(x)}{\mathrm{d}x^{-1}} = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^{-1}f(x)}{\mathrm{d}x^{-1}} = \int_0^x f(x')\mathrm{d}x'$$

6.2 Κλασματικός τελεστής Laplace

Για να γενικεύσουμε τον τελεστή Laplace, πρέπει πρώτα να επεκτείνουμε τον ορισμό της κλασματικής παραγώγου για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών:

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}^{(\alpha_i)}}{\mathrm{d}x_i^{(\alpha_i)}}f(\overline{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{R}^n}\prod_{i=1}^{n}(j\omega_i)^{\alpha_i}F(\overline{\omega})\exp\left\{j\sum_{i=1}^{n}\omega_i x_i\right\}\mathrm{d}\overline{\omega}$$

Όπου $f(\overline{x})$ είναι μια συνάρτηση n μεταβλητών. Να πούμε ότι πήραμε την κλασματική παράγωγο ως προς κάθε μεταβλητή και τυπικά θα έπρεπε να παίρναμε τον πίνακα των παραγώγων όπως και στην κλασσική περίπτωση. Ωστόσο εδώ θα αρκεστούμε στο στοιχείο συνάρτηση, που είναι παραγωγισμένει ως προς όλες τις μεταβλητές.

Να πούμε επίσης, πως ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier για n μεταβλητές είναι:

$$f(\overline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}F(\overline{\omega})\exp\left\{j\sum_{i=1}^{n}\omega_i x_i\right\}\mathrm{d}\overline{\omega}$$

Θα ξεκινήσουμε δίνοντας τον κλασσικό ορισμό του τελεστή Laplace:

$$\nabla^2 f(\overline{x}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)f(\overline{x}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(j\omega_x)^2\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\overline{x})\mathrm{e}^{-j\omega_x x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{e}^{j\omega_x x}\mathrm{d}\omega_x + \\ + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(j\omega_y)^2\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\overline{x})\mathrm{e}^{-j\omega_y y}\mathrm{d}y\right]\mathrm{e}^{j\omega_y y}\mathrm{d}\omega_y + \\ + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(j\omega_z)^2\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\overline{x})\mathrm{e}^{-j\omega_z z}\mathrm{d}z\right]\mathrm{e}^{j\omega_z z}\mathrm{d}\omega_z$$

Όπου φυσικά η $f(\overline{x})$ είναι μια συνάρτηση τριών μεταβλητών. Στη συνέχεια για τις ανάγκες μας θα θεωρήσουμε τις μεταβλητές $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ ίσες, $(\omega_x = \omega_y = \omega_z = \omega)$ και έτσι έχουμε τον κλασσικό τελεστή Laplace:

$$\nabla^2 f(\overline{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(-\omega^2)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\overline{x})\mathrm{e}^{-j\omega x}\mathrm{d}x + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^{+\infty}f(\overline{x})\mathrm{e}^{-j\omega y}\mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{+\infty}f(\overline{x})\mathrm{e}^{-j\omega z}\mathrm{d}z\right]\mathrm{e}^{j\omega x}\mathrm{d}\omega$$

Ο παραπάνω ορισμός φαίνεται εύλογος και είναι λογικό επακόλουθο όλων όσων έχουμε πει ως τώρα σε αυτό το κεφάλαιο. Ωστόσο στην γενίκευση θα είμαστε λίγο διαφορετικοί στην έκφραση που θα δώσουμε, χωρίς βέβαια να είμαστε ασυνεπείς σε όσα απαιτούμε για κάθε γενίκευση. Όπως και στην απλή κλασματική παράγωγο, έτσι και εδώ, η γενίκευση δεν είναι μοναδική. Ο ορισμός που θα δούμε τώρα, είναι ένας, που εκτός από την συνέπεια του ως προς τις γενικεύσεις, είναι και χρήσιμος στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων, πράγμα που θα δούμε αμέσως μετά.

Γενικευμένος τελεστής Laplace:

$$(\nabla^2)^\alpha f(\overline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(-\omega^2)^\alpha F(\omega)\exp\{j\omega(x+y+z)\}\mathrm{d}^3\omega$$

Όπου $F(\omega)$ ο αντίστροφος της $f(\overline{x})$ ως προς όλες τις μεταβλητές. Καμιά φορά είναι πρακτικό να χρησιμοποιούμε το $(-\omega^2)^\alpha$ ως:

$$(-\omega^2)^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\ln(-\omega)^2} = \mathrm{e}^{\alpha\ln|\omega^2|+j\alpha\pi}$$

Θα λύσουμε την κυματική εξίσωση με την χρήση του γενικευμένου τελεστή Laplace. Είναι:

$$\nabla^2\Phi(\overline{x},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(\overline{x},t)$$

Αν αντιμετωπίσουμε το ∇^2 σαν μία παράμετρο, τότε έχουμε την λύση:

$$\Phi(\overline{x},t) = \mathrm{e}^{-ct\sqrt{\nabla^2}}a(\overline{x}) + \mathrm{e}^{ct\sqrt{\nabla^2}}b(\overline{x})$$

Το ερώτημα που δημιουργείται είναι: ποια είναι η δράση του τελεστή $\mathrm{e}^{ct\sqrt{\nabla^2}}$. Με τον παραπάνω ορισμό του κλασματικού τελεστή Laplace για $\alpha = 1/2$ και την χρήση της εκθετικής σειράς, έχουμε για μια συνάρτηση $f(\overline{x})$:

$$\begin{aligned}
ct\sqrt{\nabla^2}f(\overline{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}(j\omega ct)F(\omega)\exp\{j\omega(x+y+z)\}\mathrm{d}^3\omega \\
\Rightarrow\quad \mathrm{e}^{ct\sqrt{\nabla^2}}f(\overline{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\left[\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(j\omega ct)^i}{i!}\right]F(\omega)\exp\{j\omega(x+y+z)\}\mathrm{d}^3\omega \\
\Rightarrow\quad \mathrm{e}^{ct\sqrt{\nabla^2}}f(\overline{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{e}^{j\omega ct}F(\omega)\exp\{j\omega(x+y+z)\}\mathrm{d}^3\omega
\end{aligned}$$

Άρα:

$$\Phi(\overline{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}A(\omega)\exp\{j\omega(x+y+z-ct)\}\mathrm{d}^3\omega + \\ + \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}B(\omega)\exp\{j\omega(x+y+z-ct)\}\mathrm{d}^3\omega$$

Με:

$$a(\overline{x}) \overset{\mathcal{F}^3}{\longleftrightarrow} A(\omega) \quad , \quad b(\overline{x}) \overset{\mathcal{F}^3}{\longleftrightarrow} B(\omega)$$

,δηλαδή ο μετασχηματισμός Fourier για συνάρτηση τριών μεταβλητών ως προς μία μεταβλητή. Έπειτα μπορούμε να εξάγουμε τα $a(\overline{x})$ και $b(\overline{x})$ συναρτήσει των αρχικών συνθηκών και να τελειώσουμε. Είναι:

$$\Phi(\overline{x},0) = a(\overline{x}) + b(\overline{x}) \quad , \quad \frac{1}{c}(\nabla^2)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\overline{x},t)\bigg|_{t=0} = -a(\overline{x}) + b(\overline{x})$$

Οπότε λύνοντας το παραπάνω σύστημα, έχουμε:

$$a(\overline{x}) = \frac{1}{2}\Phi(\overline{x},0) - \frac{1}{2c}\,(\nabla^2)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\overline{x},t)\bigg|_{t=0} \quad , \quad b(\overline{x}) = \frac{1}{2}\Phi(\overline{x},0) + \frac{1}{2c}\,(\nabla^2)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\overline{x},t)\bigg|_{t=0}$$

6.3 Συμπεριφορά της κλασματικής παραγώγου

6.3.1 Κλασματική παράγωγος βασικών συναρτήσεων

Θα δούμε μερικές κλασματικές παραγωγίσεις συνηθισμένων συναρτήσεων. Καταρχήν ορίζουμε μερικές νέες συναρτήσεις οι οποίες στην κλασματική ανάλυση χρησιμοποιούνται κατά κόρον, ειδικά σε αναγωγικούς τύπους.

$$E_x(\alpha, c) = {}_0D_x^{-\alpha} \mathrm{e}^{cx}$$

$$C_x(\alpha, c) = {}_0D_x^{-\alpha} \cos(ct)$$

$$S_x(\alpha, c) = {}_0D_x^{-\alpha} \sin(ct)$$

Όπου $\alpha, c \in \mathbb{R}$.

Κλασματική παράγωγος (στην προκειμένη περίπτωση μπορούμε να το ονομάσουμε και κλασματικό ολοκλήρωμα) της σταθερής συνάρτησης:

$${}_0D_x^{-\alpha} c = \frac{c}{\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} \quad , \qquad \alpha \in \mathbb{R} \geq 0$$

Για εκθετική συνάρτηση:

$${}_0D_x^{-\alpha} \mathrm{e}^{cx} = x^{\alpha} \mathrm{e}^{cx} \gamma(\alpha, ct)$$

,όπου $\gamma(x, y)$ είναι η ατελής συνάρτηση γάμμα και ορίζεται ως:

$$\gamma(x, y) = \frac{1}{\Gamma(x) y^x} \int_0^y \xi^{x-1} \mathrm{e}^{-\xi} \mathrm{d}\xi$$

Για την ειδική περίπτωση, όπου $\alpha = 1/2$, έχουμε:

$${}_0D_x^{-1/2} \mathrm{e}^{cx} = E_x(-\frac{1}{2}, c) = c^{-1/2} \mathrm{e}^{cx} \mathrm{Erf}^{1/2}(cx)$$

,όπου:

$$\mathrm{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-\xi^2} \mathrm{d}\xi$$

Για τις αρμονικές συναρτήσεις, έχουμε:

$${}_0D_x^{-\alpha} \cos(cx) = \cos(cx) C_x(\alpha, c) - \sin(cx) S_x(\alpha, c) \quad , \qquad \alpha \in \mathbb{R} \geq 0$$

$${}_0D_x^{-\alpha} \sin(cx) = \sin(cx) C_x(\alpha, c) + \cos(cx) S_x(\alpha, c) \quad , \qquad \alpha \in \mathbb{R} \geq 0$$

Για την ειδική περίπτωση, όπου $\alpha = 1/2$, έχουμε:

$${}_0D_x^{-1/2} \cos(cx) = \sqrt{\frac{2}{c}} \left[\cos(cx) C(x) + \sin(cx) S(x)\right]$$

$${}_0D_x^{-1/2} \sin(cx) = \sqrt{\frac{2}{c}} \left[\sin(cx) C(x) - \cos(cx) S(x)\right]$$

,όπου $C(x)$ και $S(x)$ είναι τα ολοκληρώματα Fresnel:

$$C(x) = \int_0^x \cos(\frac{\pi\xi^2}{2})\mathrm{d}\xi \quad , \quad S(x) = \int_0^x \sin(\frac{\pi\xi^2}{2})\mathrm{d}\xi$$

Για την λογαριθμική συνάρτηση, έχουμε:

$${}_0D_x^{-\alpha} \ln x = \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\ln x - \gamma - \psi(\alpha+1)\right] \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R} \geq 0$$

,όπου το γ είναι η σταθερά του Euler και $\psi(x)$ μία συνάρτηση, η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\psi(x) = {}_0D_x^1[\ln\Gamma(x)] = \frac{{}_0D_x^1\Gamma(x)}{\Gamma(x)}$$

Για την ειδική περίπτωση, όπου $\alpha = 1/2$, έχουμε:

$${}_0D_x^{-1/2} \ln x = \sqrt{\frac{x}{\pi}}\,[2\ln(4x) - 4]$$

Για την συνάρτηση $f(x) = x^\kappa \ln x$, είναι:

$${}_0D_x^{-\alpha}[x^\kappa \ln x] = \frac{\Gamma(\kappa+1)x^{\kappa+\alpha}}{\Gamma(\kappa+\alpha+1)}[\ln x + \psi(\kappa+1) - \psi(\kappa+\alpha+1))] \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R} \geq 0\,,\ \kappa \in \mathbb{R} \geq -1$$

Για την ειδική περίπτωση, όπου $\alpha = 1/2$ και $\kappa = -1/2$, έχουμε:

$${}_0D_x^{-1/2}[x^{-1/2} \ln x] = \sqrt{\pi}\ln\left(\frac{x}{4}\right)$$

Για την συνάρτηση $f(x) = x\mathrm{e}^{cx}$, είναι:

$${}_0D_x^{-\alpha}[x\mathrm{e}^{cx}] = xE_x(\alpha, c) - \alpha E_x(\alpha+1, c) \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R} \geq 0$$

Επισημάναμε πριν πως με τον σύνολο των ορισμών που δώσαμε για την κλασματική παράγωγο, που δεν κάνει χρήση τον τελεστή Fourier, μπορούμε πιο εύκολα να εξάγουμε γενικές σχέσεις. Επίσης επισημάναμε πως πολλές φορές δεν καλύπτεται όλο το εύρος των τάξεων του τελεστή. Από τις παραπάνω σχέσεις γίνεται σαφές πως σε όλες της κλασσικές συναρτήσεις, εκτός από την εκθετική, η κλασματική παράγωγος, με την βοήθεια του δεύτερου ορισμού, ισχύει μόνο για αρνητικές τάξεις του τελεστή. Ουσιαστικά εκεί μιλάμε για κλασματικά ολοκληρώματα. Για να φτάσουμε να παράγουμε σχέσεις για όλες τις τάξεις του τελεστή, χρησιμοποιούμε ένα αλγεβρικό τέχνασμα.

Είναι γνωστό ότι η αθροιστική ιδιότητα ισχύει για όλες τις τάξεις. Οπότε για κάποια θετική τάξη μ επιλέγουμε τον αμέσως μεγαλύτερο ακέραιο m και αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα ως εξής:

$${}_0D_x^\mu f(x) = {}_0D_x^m[\,{}_0D_x^{-\alpha} f(x)] \quad , \quad \alpha = m - \mu$$

,όπου το m είναι ακέραια θετική τάξη του τελεστή της παραγώγου και είναι γνωστοί όλοι οι σχετικοί υπολογισμοί.

6.3.2 Μετασχηματισμοί Laplace κλασματικά παραγωγισμένων συναρτήσεων.

Αν συνεχίσουμε τις ίδιες σκέψεις, τότε δεν θα θεωρήσει κανείς παράξενο να δημιουργήσουμε και κλασματικές διαφορικές εξισώσεις. Οι κλασματικές διαφορικές εξισώσεις είναι ολόκληρος κλάδος της κλασματικής ανάλυσης και μάλιστα από τους πιο περίπλοκους κλάδους των μαθηματικών. Από τις κλασσικές διαφορικές εξισώσεις ξέρουμε, πως σε πολύ ειδικές περιπτώσεις έχουμε ολοκληρωμένες λύσεις. Έτσι και εδώ, λίγες είναι οι φορές, που μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα. Πριν δούμε τις εξισώσεις αυτές, θα κάνουμε μια εισαγωγή στο μεγαλύτερο εργαλείο που έχουμε σε αυτόν τον τομέα, το οποίο είναι το ίδιο με αυτό της κλασσικής περίπτωσης. Πρόκειται για τον μετασχηματισμό (κλασσικό) Laplace.

Μετασχηματισμός Laplace κλασματικά παραγωγισμένης συνάρτησης $f(x)$:

$$\mathcal{L}[\,{}_0D_x^u f(x)] = s^u F(s) - \sum_{i=0}^{m-1} s^{m-i-1}\,{}_0D_x^{i-m+u} f(x)\Big|_{x=0} \quad , \quad m-1 < u \leq m \;\; , \quad m \in \mathbb{N}$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\,{}_0D_x^u f(x)] &= \mathcal{L}\Big\{\,{}_0D_x^m[\,{}_0D_x^{-(m-u)} f(x)]\Big\} \\
&= s^m \mathcal{L}[\,{}_0D_x^{-(m-u)} f(x)] - \sum_{i=0}^{m-1} s^{m-i-1}\,{}_0D_x^{i}[\,{}_0D_x^{-(m-u)} f(x)]\Big|_{x=0} \\
&= s^m [s^{-(m-u)} F(s)] - \sum_{i=0}^{m-1} s^{m-i-1}\,{}_0D_x^{i-(m-u)} f(x)\Big|_{x=0} \\
&= s^u F(s) - \sum_{i=0}^{m-1} s^{m-i-1}\,{}_0D_x^{i-m+u} f(x)\Big|_{x=0}
\end{aligned}$$

,όπου φυσικά η συνάρτηση $F(s)$, είναι η κλασσικά μετασχηματισμένη Laplace της συνάρτησης $f(x)$ με μεταβλητή s. Στη συνέχεια θα δούμε μερικούς αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace ορισμένων συναρτήσεων, τον οποίων η παρουσία είναι συχνή κατά τι διάρκεια λύσης αρκετών κλασματικών διαφορικών εξισώσεων.

Για $a, b \in \mathbb{R}$ και $u \in \mathbb{R} > 0$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^u(s-a)}\right] &= E_x(u,a) \\
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^u(s-a)^2}\right] &= xE_x(u,a) - vE_x(u+1,a) \\
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^u(s-a)^3}\right] &= \frac{x^2}{2}E_x(u,a) - uxE_x(u+1,a) + \frac{v}{2}(u+1)E_x(u+2,\alpha)
\end{aligned}$$

,και πιο γενικά:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^u(s-a)^n}\right] = \frac{1}{(n-1)!\Gamma(u)} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} \Gamma(u+i) x^{n-i-1} E_x(u+i,a) \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

Για $q \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] &= E_x(0,a) = \mathrm{e}^{ax} \\
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{1/2}-a}\right] &= E_x(-\frac{1}{2},a^2) + aE_x(0,a^2) \\
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{1/3}-a}\right] &= E_x(-\frac{2}{3},a^3) + aE_x(-\frac{1}{3},a^3) + a^2E_x(0,a^3)
\end{aligned}$$

,και πιο γενικά:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{1/q}-a}\right] = \sum_{i=1}^{q} a^{i-1} E_x(\frac{i}{q}-1, a^q)$$

,και για $1/q+u>0$, έχουμε:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^u(s^{1/q}-a)}\right]=\sum_{i=1}^{q}a^{i-1}E_x(\frac{i}{q}+u-1,a^q)$$

Επίσης:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{2/q}-b^2}\right]=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{q}b^{(i-2)}\left[E_x(\frac{i}{q}-1,b^q)+(-1)^iE_x(\frac{i}{q}-1,-b^q)\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^u(s^{1/q}-a)(s^2+b^2)}\right]=\frac{1}{ab(a^{2q}+b^2)}\sum_{i=1}^{q}\left[ba^iE_x(u+\frac{i}{q}-1,a^q)-\right.$$
$$\left.-\,ba^iC_x(u+\frac{i}{q}-1,b)-a^{q+i}S_x(u+\frac{i}{q}-1,b)\right]$$

6.3.3 Κλασματικές διαφορικές εξισώσεις

Θα δώσουμε μία μέθοδο για την επίλυση γραμμικών κλασματικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές, που οι διάφορες τάξεις του τελεστή της παραγώγου έχουν συγκεκριμένη ακολουθία. Η διαφορική εξίσωση για την οποία μιλάμε, έχει την εξής μορφή:

$$\left[\,{}_0D_x^{nu}+\,{}_0D_x^{(n-1)u}+\,{}_0D_x^{(n-2)u}+\cdots+\,{}_0D_x^{0}\right]y(x)=0\quad,\qquad n\in\mathbb{N}\;,\;u\in\mathbb{R}\geq 0$$

Και για την λύση της ορίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$P(t)=t^n+a_1t^{n-1}+\cdots+a_n$$

Μερικές λύσεις:

$$y_1(x)=\mathcal{L}^{-1}[P^{-1}(s^u)]\quad,\quad y_{j+1}(x)=\,{}_0D_x^{j}y_1(x)\quad,\quad j=0,1,\ldots,N-1\quad,\quad N\geq nu$$

Οπότε η γενική λύση, όπως και στην κλασσική περίπτωση, είναι γραμμικός συνδυασμός των μερικών λύσεων. Η απόδειξη του παραπάνω κάνει χρήση δύο ειδικών θεωρημάτων του μετασχηματισμού Laplace, των οποίων η ανάπτυξη δεν είναι σκόπιμο να γίνει εδώ. Θα δούμε τώρα ένα παράδειγμα.

Να λυθεί η κλασματική εξίσωση:

$$\left[\,{}_0D_x^{0,2}-3\,{}_0D_x^{0,1}+2\right]y(x)=0$$

Λύση:

$$P(t)=t^2-3t+2=(t-1)(t-2)\qquad\Rightarrow\qquad P(s^{0,1})=(s^{0,1}-1)(s^{0,1}-2)$$

Οπότε:

$$P^{-1}(s^{0,1})=\frac{1}{(s^{0,1}-1)(s^{0,1}-2)}=-\frac{1}{(s^{0,1}-1)}+\frac{1}{(s^{0,1}-2)}$$

$$\Rightarrow\qquad y_1(x)=\mathcal{L}^{-1}[P^{-1}(s^{0,1})]=-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^{0,1}-1)}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^{0,1}-2)}\right]$$

Και άρα:

$$y_1(x) = -\sum_{i=1}^{10} E_x(\frac{i}{10} - 1, 1) + \sum_{i=1}^{10} 2^{i-1} E_x(\frac{i}{10} - 1, 2^{10})$$

και η γενική λύση $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ είναι:

$$y(x) = -c_1 \sum_{i=1}^{10} E_x(\frac{i}{10} - 1, 1) + c_1 \sum_{i=1}^{10} 2^{i-1} E_x(\frac{i}{10} - 1, 2^{10}) -$$
$$- c_2 \sum_{i=1}^{10} \frac{\partial}{\partial x} E_x(\frac{i}{10} - 1, 1) + c_2 \sum_{i=1}^{10} 2^{i-1} \frac{\partial}{\partial x} E_x(\frac{i}{10} - 1, 2^{10})$$

Μια άλλη κατηγορία κλασματικών διαφορικών εξισώσεων, που είναι υποκατηγορία της παραπάνω κατηγορίας είναι:

$${}_0D_x^{1/q} y(x) - c \, {}_0D_x^{0} y(x) = 0 \quad , \qquad c \in \mathbb{R} \, , \; q \in \mathbb{N}$$

Με λύση:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{q} c^{q-i} E_x(-\frac{i}{q}, c^q)$$

Παράδειγμα:

$${}_0D_x^{1/2} y(x) - 5 \, {}_0D_x^{0} y(x) = 0$$

Λύση:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{2} 5^{2-i} E_x(-\frac{i}{2}, 5^2) = \sum_{i=1}^{2} \frac{25}{5^i} E_x(-\frac{i}{2}, 25)$$

$$\Rightarrow \qquad y(x) = 5E_x(-\frac{1}{2}, 25) + E_x(-1, 25)$$

Κεφάλαιο 7

Παραρτήματα

Σε αυτό το τελευταίο κεφάλαιο έχουν συγκεντρωθεί κάποιες αποδείξεις και κάποιες αναπτύξεις που ίσως κανείς τις θεωρούσε δευτερεύουσες κατά την διάρκεια τον βασικών αποδείξεων. Ωστόσο για λόγους πληρότητας τις έχουμε προσθέσει εδώ. Επίσης έχουμε προσθέσει κάποιες ιδιότητες του FrFT και κάποιους μετασχηματισμούς αυτού, βασικών συναρτήσεων.

7.1 Πολυώνυμα Hermite

Όπως είδαμε και στα προηγούμενα, τα πολυώνυμα Hermite ορίζονται ως εξής:

$$H_n(t) = (-1)^n \mathrm{e}^{t^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left[\mathrm{e}^{-t^2}\right] \qquad ,\forall \;\; n \in \mathbb{N}^*$$

Ολοκληρωτική μορφή:

$$H_n(t) = \frac{(-2j)^n \mathrm{e}^{t^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} x^n \mathrm{e}^{2jxt} \mathrm{d}x$$

Να πούμε επιπλέον ότι αποτελούν λύσεις της διαφορικής εξίσωσης του Hermite:

$$y''(t) + 2ty'(t) + 2ny(t) = 0 \qquad ,\forall \;\; n \in \mathbb{N}^*$$

Τα πρώτα πέντε είναι:

- $H_0(t) = 1$
- $H_1(t) = 2t$
- $H_2(t) = 4t^2 - 2$
- $H_3(t) = 8t^3 - 12t$
- $H_4(t) = 16t^4 - 48t^2 + 12$

Ιδιότητες:

1. $H_n(-t) = (-1)^n H_n(t)$

<u>Απόδειξη:</u>

Χωρίζουμε τους αριθμούς σε άρτιους και περιττούς. Για $n = 2k \;\; ,\forall \;\; k \in \mathbb{N}^*$ έχουμε:

$$H_{2k}(-t) = (-1)^{2k}\mathrm{e}^{(-t)^2}\frac{\mathrm{d}^{2k}}{\mathrm{d}(-t)^{2k}}\left[\mathrm{e}^{-(-t)^2}\right] = \mathrm{e}^{t^2}\frac{\mathrm{d}^{2k}}{(-1)^{2k}\mathrm{d}t^{2k}}\left[\mathrm{e}^{-t^2}\right]$$
$$= \mathrm{e}^{t^2}\frac{\mathrm{d}^{2k}}{\mathrm{d}t^{2k}}\left[\mathrm{e}^{-t^2}\right] = (-1)^{2k}\mathrm{e}^{t^2}\frac{\mathrm{d}^{2k}}{\mathrm{d}t^{2k}}\left[\mathrm{e}^{-t^2}\right] = H_{2k}(t)$$

,όπου $1 = (-1)^{2k}$ $, \forall \ k \in \mathbb{N}^*$. Για $n = 2k+1$ έχουμε:

$$H_{2k+1}(-t) = (-1)^{2k+1}\mathrm{e}^{(-t)^2}\frac{\mathrm{d}^{(2k+1)}}{\mathrm{d}(-t)^{(2k+1)}}\left[\mathrm{e}^{-(-t)^2}\right] = (-1)^{2k+1}\mathrm{e}^{t^2}\frac{\mathrm{d}^{(2k+1)}}{(-1)^{2k+1}\mathrm{d}t^{(2k+1)}}\left[\mathrm{e}^{-t^2}\right]$$
$$= \mathrm{e}^{t^2}\frac{\mathrm{d}^{(2k+1)}}{\mathrm{d}t^{(2k+1)}}\left[\mathrm{e}^{-t^2}\right] = -(-1)^{2k+1}\mathrm{e}^{t^2}\frac{\mathrm{d}^{(2k+1)}}{\mathrm{d}t^{(2k+1)}}\left[\mathrm{e}^{-t^2}\right] = -H_{2k+1}(t)$$

,όπου $1 = -(-1)^{2k+1}$ $, \forall \ k \in \mathbb{N}^*$. Άρα για άρτιους έχουμε $H_n(-t) = H_n(t)$ και για περιττούς $H_n(-t) = -H_n(t)$. Οπότε $\forall \ n \in \mathbb{N}^*$ έχουμε:

$$H_n(-t) = (-1)^n H_n(t)$$

2. $H_n'(t) = 2tH_n(t) - H_{n+1}(t)$

<u>Απόδειξη</u>:

$$H_n'(t) = \left[(-1)^n\mathrm{e}^{t^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left[\mathrm{e}^{-t^2}\right]\right]' = (-1)^n 2t\mathrm{e}^{t^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left[\mathrm{e}^{-t^2}\right] + (-1)^n\mathrm{e}^{t^2}\frac{\mathrm{d}^{(n+1)}}{\mathrm{d}t^{(n+1)}}\left[\mathrm{e}^{-t^2}\right]$$
$$= 2t(-1)^n\mathrm{e}^{t^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left[\mathrm{e}^{-t^2}\right] - (-1)^{n+1}\mathrm{e}^{t^2}\frac{\mathrm{d}^{(n+1)}}{\mathrm{d}t^{(n+1)}}\left[\mathrm{e}^{-t^2}\right]$$

$$\Rightarrow \qquad H_n'(t) = 2tH_n(t) - H_{n+1}(t)$$

Επίσης ισχύουν (χωρίς απόδειξη):

3. $H_n''(t) = (4t^2+2)H_n(t) + H_{n+2}(t)$

4. $H_{n+1}'(t) = 2tH_{n+1}(t) + H_{n+2}(t)$

5. $H_n'(t) = 2nH_{n-1}(t)$

6. $H_{n+1}(t) + 2nH_{n-1}(t) = 2tH_n(t)$

7.2 Εύρεση των ιδιοκαταστάσεων του τελεστή Fourier

Ορίζουμε την ακολουθία συναρτήσεων:

$$\psi_n(t) = H_n(\sqrt{2\pi}\ t)\mathrm{e}^{-\pi t^2}$$

Ισχύει:

$$\mathcal{F}[\psi_n(t)](f) = (-j)^n\psi_n(f)$$

Απόδειξη:

Από την σχέση (2) της παραγράφου (7.1) έχουμε:

$$H_{n+1}(\sqrt{2\pi}\ t) = 2\sqrt{2\pi}\ tH_n(\sqrt{2\pi}\ t) - H_n'(\sqrt{2\pi}\ t)$$

Οπότε από την πρώτη παράγωγο της $\psi_n(t)$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\psi_n'(t) &= \sqrt{2\pi}H_n'(\sqrt{2\pi}\ t)\mathrm{e}^{-\pi t^2} - 2\pi t H_n(\sqrt{2\pi}\ t)\mathrm{e}^{-\pi t^2} \\
&= \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\pi t^2}\left[H_n'(\sqrt{2\pi}\ t) - \sqrt{2\pi}\ tH_n(\sqrt{2\pi}\ t)\right] \\
&= \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\pi t^2}\left[-H_{n+1}(\sqrt{2\pi}\ t) + \sqrt{2\pi}\ tH_n(\sqrt{2\pi}\ t)\right] \\
&= \sqrt{2\pi}\psi_{n+1}(t) + 2\pi t\psi_n(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad \psi_n'(t) &= -\sqrt{2\pi}\psi_{n+1}(t) + 2\pi t\psi_n(t) \\
\Rightarrow \qquad \psi_{n+1}(t) &= \sqrt{2\pi}\ t\psi_n(t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\psi_n'(t)
\end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε των μετασχηματισμό Fourier και στα δύο μέλη:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[\psi_{n+1}(t)\right] &= \mathcal{F}\left[\sqrt{2\pi}\ t\psi_n(t)\right] - \mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\psi_n'(t)\right] \\
\Rightarrow \qquad \mathcal{F}\left[\psi_{n+1}(t)\right] &= \sqrt{2\pi}\mathcal{F}\left[t\psi_n(t)\right] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}\left[\psi_n'(t)\right]
\end{aligned}$$

Από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier:

$$\mathcal{F}\left[xf(x)\right] = -\frac{1}{2\pi j}F'(f) \quad , \quad \mathcal{F}\left[f'(x)\right] = 2\pi jF(f)$$

έχουμε:

$$\begin{aligned}
\Psi_{n+1}(f) &= \frac{j}{\sqrt{2\pi}}\Psi_n'(f) - j\sqrt{2\pi}\Psi_n(f) \\
\Rightarrow \qquad \Psi_{n+1}(f) &= -j\left[\sqrt{2\pi}f\Psi_n(f) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Psi_n'(f)\right]
\end{aligned}$$

,όπου:

$$\mathcal{F}[\psi_n(t)] = \Psi_n(f)$$

Από τον ορισμό της ακολουθίας $\psi_n(t)$, έχουμε:

$$\psi_0(t) = H_0(\sqrt{2\pi}\ t)\mathrm{e}^{-\pi t^2}$$

Επίσης:

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-\pi t^2}] = \mathrm{e}^{-\pi f^2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}[\psi_0(t)] = \psi_0(f) = (-j)^0\psi_0(f)$$

Οπότε:

$$\Psi_1(t) = -j\left[\sqrt{2\pi}f\Psi_0(f) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Psi_0'(f)\right] = -j\left[\sqrt{2\pi}f\psi_0(f) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\psi_0'(f)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \Psi_1(t) = -j\psi_1(f) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}[\psi_1(t)] = (-j)^1\psi_1(f)$$

Επαγωγικά θα δείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει η σχέση (7.3):

Έστω ότι ισχύει για $k \in \mathbb{N}^*$, τότε:

$$\begin{aligned}
\Psi_{k+1}(f) &= -j\left[\sqrt{2\pi}f\Psi_k(f) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Psi_k'(f)\right] \\
&= -j\left[\sqrt{2\pi}f(-j)^k\psi_k(f) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-j)^k\psi_k'(f)\right] \\
&= (-j)^{k+1}\left[\sqrt{2\pi}f\psi_0(f) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\psi_0'(f)\right] \\
&= (-j)^{k+1}\psi_{k+1}(f)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}[\psi_{k+1}(t)] = (-j)^{k+1}\psi_{k+1}(f)$$

Οπότε ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Έτσι οι ιδιοσυναρτήσεις θα έχουν την μορφή:

$$e_n(t) = c_n H_n(\sqrt{2\pi}t)\mathrm{e}^{-\pi t^2}$$

Θα καθορίσουμε τα c_n έτσι ώστε να ισχύει η ορθοκανονικότητα:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e_n^*(t)e_m(t)\mathrm{d}t = \delta_{nm}$$

Είναι:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e_n^*(t)e_m(t)\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{\infty} c_n H_n(\sqrt{2\pi}\ t)\mathrm{e}^{-\pi t^2} c_m H_m(\sqrt{2\pi}\ t)\mathrm{e}^{-\pi t^2}\mathrm{d}t \\
&= c_n c_m \int_{-\infty}^{\infty} H_n(\sqrt{2\pi}\ t)H_m(\sqrt{2\pi}\ t)\mathrm{e}^{-2\pi t^2}\mathrm{d}t \\
&= c_n c_m \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_m(x)\mathrm{e}^{-x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \frac{c_n c_m}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_m(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{c_n c_m}{\sqrt{2\pi}} n! 2^n\sqrt{\pi}\ \delta_{nm}
\end{aligned}$$

Άρα:

$$\frac{c_n^2}{\sqrt{2\pi}} n! 2^n \sqrt{\pi} = 1 \quad \Rightarrow \quad c_n = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{n!2^n}}$$

Έτσι οι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή Fourier είναι:

$$\psi_n(t) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{n!2^n}} H_n(\sqrt{2\pi}\ t)\mathrm{e}^{-\pi t^2}$$

Ή με την αλλαγή μεταβλητής $\sqrt{2\pi}\ t = x$:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!2^n\sqrt{\pi}}} H_n(x)\mathrm{e}^{-x^2/2}$$

Και οι ιδιοτιμές:

$$\lambda_n = (-j)^n = \mathrm{e}^{-\pi n j/2}$$

7.3 Απόδειξη της σχέσης Mehler

Σχέση Mehler:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(t)H_n(f)}{n!2^n} r^n = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \exp\left[\frac{2tfr - (t^2+f^2)r^2}{1-r^2}\right]$$

Απόδειξη:

Ορίζουμε την συνάρτηση $k(r,t,f)$:

$$k(r,t,f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(t)H_n(f)}{n!2^n} r^n$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial k}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n'(t)H_n(f)}{n!2^n} r^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2nH_{n-1}(t)H_n(f)}{n!2^n} r^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(n+1)H_n(t)H_{n+1}(f)}{(n+1)!2^{n+1}} r^{n+1} = r\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(t)H_{n+1}(f)}{n!2^n} r^n
\end{aligned}$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε την σχέσει (5) της παραγράφου (7.1). Επίσης από τη σχέση (6) της ίδιας παραγράφου, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial k}{\partial t} &= r\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(t)[2fH_n(f) - 2nH_{n-1}(f)]}{n!2^n} r^n = \\
&= 2rf\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(t)H_n(f)}{n!2^n} r^n - r\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(t)H_{n-1}(f)}{(n-1)!2^{n-1}} r^n \\
&= 2rf\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(t)H_n(f)}{n!2^n} r^n - r\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_{n+1}(t)H_n(f)}{n!2^n} r^{n+1} \\
&= 2rf\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(t)H_n(f)}{n!2^n} r^n\right] - r\left[r\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_{n+1}(t)H_n(f)}{n!2^n} r^n\right]
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial k}{\partial t} = 2rfk - r\frac{\partial k}{\partial f}$$

Ομοίως:

$$\frac{\partial k}{\partial f} = 2rtk - r\frac{\partial k}{\partial t}$$

Οπότε συνδυάζοντας τις (7.4) και (7.5) έχουμε:

$$\frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{2rf - 2r^2 t}{1 - r^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \ln k}{\partial t} = \frac{2rf - 2r^2 t}{1 - r^2} \quad \Rightarrow \quad \ln k = \frac{2rtf - r^2 t^2}{1 - r^2} + A_1(f, r)$$

$$\Rightarrow \quad k = \exp\left[\frac{2rtf - r^2 t^2}{1 - r^2}\right] \exp[A_1(f, r)] = B(f, r) \exp\left[\frac{2rtf - r^2 t^2}{1 - r^2}\right]$$

Και:

$$\frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial f} = \frac{2rt - 2r^2 f}{1 - r^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \ln k}{\partial f} = \frac{2rt - 2r^2 f}{1 - r^2} \quad \Rightarrow \quad \ln k = \frac{2rft - r^2 f^2}{1 - r^2} + A_2(t, r)$$

$$\Rightarrow \quad k = \exp\left[\frac{2rtf - r^2 f^2}{1 - r^2}\right] \exp[A_2(t, r)] = C(t, r) \exp\left[\frac{2rtf - r^2 f^2}{1 - r^2}\right]$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, παίρνουμε:

$$k = a(r) \exp\left[\frac{2rtf - (t^2 + f^2) r^2}{1 - r^2}\right]$$

Μας μένει να υπολογίσουμε την $a(r)$:

$$k(r, 0, 0) = a(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^2(0) r^n}{2^n n!}$$

Για τον υπολογισμό του $H_n(0)$ θα την ολοκληρωτική μορφή των πολυωνύμων Hermite:

$$H_n(t) = \frac{(-2j)^n \mathrm{e}^{t^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} x^n \mathrm{e}^{2jxt} \mathrm{d}x$$

Για n περιττά το ολοκλήρωμα είναι μηδέν, διότι η συνάρτηση αυτού είναι περιττή. Οπότε για n άρτια θα είναι:

$$H_{2n}(0) = \frac{(-2j)^{2n}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} x^{2n} \mathrm{d}x = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$$

$$\Rightarrow \quad a(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{2n}^2(0) r^{2n}}{2^{2n}(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!(2n)! r^{2n}}{2^{2n}(2n)! n! n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! r^{2n}}{2^{2n} n! n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)^n r^{2n}}{n!} = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}}$$

Άρα:

$$k(r, t, f) = \sqrt{1 - r^2} \exp\left[\frac{2rtf - (t^2 + f^2) r^2}{1 - r^2}\right]$$

7.4 Κλασματικές διαστάσεις

Από την αρχή του εικοστού αιώνα άρχισαν να εφαρμόζονται θεωρίες που χρησιμοποιούσαν παραπάνω διαστάσεις από τρις. Η πιο βασική θεωρία από αυτές, ήταν η γενική θεωρία της σχετικότητας, που θεωρεί τέσσερις διαστάσεις. Μετά τον β′ παγκόσμιο πόλεμο, που ξεκίνησε η ανάπτυξη της θεωρίας του χάους, έγινε η εισαγωγή των κλασματικών διαστάσεων. Ο ορισμός της έννοιας της κλασματικής διάστασης, σαν αφηρημένη μαθηματική έννοια, θα φανεί εύκολος. Αντίθετα η απεικόνιση, απαιτεί λίγη φαντασία. Οι επαναλαμβανόμενες γεωμετρικές δομές, γνωστές και ως Fractal, αντιστοιχούν αμφιμονοσήμαντα σε μία κλασματική διάσταση και έτσι μπορούμε να πάρουμε μια ιδέα για την εικόνα, της κάθε φορά υπό μελέτη κλασματικής διάστασης.

Αν η μία διάσταση έχει μέτρο α, τότε δύο έχουν μέτρο α^2 και οι τρεις έχουν μέτρο α^3. Οπότε προκύπτει ο ακόλουθος ορισμός.

Ορισμός.

Ο γενικευμένος όγκος μιας κλασματικής διάστασης d, όπου το μέτρο της μοναδιαίας διάστασης είναι α, δίνεται από την σχέση:

$$V = \alpha^d$$

Τελευταία γίνεται λόγος και για μιγαδικές διαστάσεις.

7.5 Αβεβαιότητα μεταξύ δύο τάξεων του FrFT

Μπορούμε να εξάγουμε μια σχέση που να δίνει την αβεβαιότητα δύο γενικευμένων μετασχηματισμών Fourier διαφορετικής τάξης της ίδιας συνάρτησης. Η σχέση αυτή είναι:

$$\Delta f_\alpha^2 \Delta f_\beta^2 \geq \frac{1}{4}\sin^2(\alpha - \beta)$$

Όπου Δf_α και Δf_β οι αποκλίσεις του μεγέθους f για της αντίστοιχες τάξεις του FrFT α και β, και δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\Delta f_\alpha^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \left(f - \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f \, |F_a(f)|^2 \, \mathrm{d}f \right] \right) F_a(f) \right|^2 \mathrm{d}f$$
$$\Delta f_\beta^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \left(f - \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f \, |F_b(f)|^2 \, \mathrm{d}f \right] \right) F_b(f) \right|^2 \mathrm{d}f$$

Με:

$$\mathcal{F}^\alpha[f(x)] = F_a(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sqrt{1 - j\cot a}\ \exp\left\{ j\pi \left[(x^2 + f^2)\cot a - 2xf\csc a \right] \right\} \mathrm{d}x \quad , \quad a = \frac{\alpha\pi}{2}$$
$$\mathcal{F}^\beta[f(x)] = F_b(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sqrt{1 - j\cot b}\ \exp\left\{ j\pi \left[(x^2 + f^2)\cot b - 2xf\csc b \right] \right\} \mathrm{d}x \quad , \quad b = \frac{\beta\pi}{2}$$

Όπου $f(x)$ η συνάρτηση του μεγέθους x. Το μέγεθος x και το μέγεθος f είναι στην συγκεκριμένη περίπτωση ταυτόσημα και έχουν την ίδια φυσική σημασία. Ο λόγος που χρησιμοποιήσαμε διαφορετικές μεταβλητές είναι για να μην γίνει σύγχυση κατά την διάρκεια των μετασχηματισμών. Αυτό που δείχνουμε εδώ, είναι η αβεβαιότητα που προκύπτει κατά διαφορετικών κλασματικών μετασχηματισμών Fourier μιας συνάρτησης κάποιου μεγέθους. Τέλος παρατηρούμε, πως για ίδιες τάξεις η αβεβαιότητα γίνεται μηδέν.

Αν τώρα θεωρήσουμε τη συνάρτηση του μεγέθους ως ένα πραγματικό σήμα μοναδιαίας ενέργειας, εξάγουμε την εξής ειδικευμένη σχέση για την αβεβαιότητα:

$$\Delta f_\alpha^2 \Delta f_\beta^2 \geq \left(\Delta f^2 \cos\alpha \cos\beta + \frac{\sin\alpha \sin\beta}{4\Delta f^2}\right)^2 + \frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{4}$$

Όπου:

$$\Delta f^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \left(f - \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f\,|f(x)|^2\,\mathrm{d}f \right] \right) f(x) \right|^2 \mathrm{d}f$$

Η περίπτωση της ισότητας παρουσιάζεται, όταν η συνάρτηση είναι γκαουσιανή:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2} \quad , \quad \sigma \in \mathbb{R}$$

7.6 Ιδιότητες του FrFT

1.Πολλαπλασιαστικός κανόνας

$$\mathcal{F}^\alpha[f(x)g(x)] = g\left(x\cos a + \frac{1}{j}\sin a \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\mathcal{F}^\alpha[f(x)]$$

2.Κανόνας διαίρεσης με x

$$\mathcal{F}^\alpha[f(x)/x] = \left(\frac{j}{\sin a}\right)\exp\left(-\frac{jx^2}{2}\cot a\right)\int_{-\infty}^{x}\exp\left(\frac{jx'^2}{2}\cot a\right)\mathcal{F}^\alpha[f(x')]\mathrm{d}x'$$

3.Κανόνας μικτού γινομένου

$$\mathcal{F}^\alpha\left[x\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right] = \left\{-(\sin a + jx^2\cos a)\sin a + x\cos(2a)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{2}\sin(2a)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right\}\mathcal{F}^\alpha[f(x)]$$

4.Κανόνας παραγώγισης

$$\mathcal{F}^\alpha\left[\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right] = \left(-jx\sin a + \cos a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\mathcal{F}^\alpha[f(x)]$$

5.Γενικός κανόνας παραγώγισης

$$\mathcal{F}^\alpha\left[\frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}\right] = \left(-jx\sin a + \cos a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n\mathcal{F}^\alpha[f(x)]$$

6.Κανόνας ολοκλήρωσης

$$\mathcal{F}^\alpha\left[\int_a^x f(x)\mathrm{d}x\right] = \sec x\ \exp\left(-\frac{jx^2}{2}\tan a\right)\int_a^x \exp\left(\frac{jx'^2}{2}\tan a\right)\mathcal{F}^\alpha\left[f(x')\right]\mathrm{d}x'$$

7.Κανόνας ολίσθησης

$$\mathcal{F}^\alpha[f(x+k)] = \exp\left[-jk\sin a\left(x + \frac{k}{2}\cos a\right)\right]\mathcal{F}^\alpha[f(x)]$$

8.Κατοπτρικός κανόνας

$$\mathcal{F}^\alpha[f(-x)] = \mathcal{F}^{\alpha-\pi}[f(x)]$$

9.Κανόνας συνέλιξης

$$f(x) *^{\alpha} g(x) = \mathrm{e}^{-jbx^2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\mathrm{e}^{-jb\tau^2} g(x-\tau)\mathrm{e}^{-jb(x-\tau)^2} \mathrm{d}\tau \ , \qquad b = \frac{1}{2}\cot(\frac{\pi a}{2})$$

7.7 FrFT μερικών συναρτήσεων

1.FrFT της συνάρτησης $\exp(x^2/2)$:

$$\mathcal{F}^{\alpha}\left[\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\right] = \exp\left(\frac{f^2}{2}\right)$$

2.FrFT της συνάρτησης $H_n(x)\exp(x^2/2)$:

$$\mathcal{F}^{\alpha}\left[H_n(x)\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\right] = H_n(f)\exp\left(\frac{f^2}{2}\right)$$

3.FrFT της συνάρτησης $\exp(x^2/2 + bx)$:

$$\mathcal{F}^{\alpha}\left[\exp\left(\frac{x^2}{2} + bx\right)\right] = \exp\left(-\frac{f^2}{2} - \frac{jb^2}{2}\mathrm{e}^{ja}\sin a + bf\mathrm{e}^{ja}\right)$$

4.FrFT της συνάρτησης $\delta(x)$:

$$\mathcal{F}^{\alpha}[\delta(x)] = \frac{\exp(j\pi/4 - ja/2)}{\sqrt{2\pi\sin a}}\exp\left(-\frac{jf^2}{2}\cot a\right)$$

5.FrFT της συνάρτησης $\delta(x-k)$:

$$\mathcal{F}^{\alpha}[\delta(x-k)] = \frac{\exp(j\pi/4 - ja/2)}{\sqrt{2\pi\sin a}}\exp\left(-\frac{j}{2}\cot a(f^2+k^2) + jkf\csc a\right)$$

6.FrFT της συνάρτησης $f(x) = c$:

$$\mathcal{F}^{\alpha}[c] = \frac{c\mathrm{e}^{-ja/2}}{\sqrt{\cos a}}\exp\left(\frac{jf^2}{2}\tan a\right)$$

7.FrFT της συνάρτησης $\exp(jkx)$:

$$\mathcal{F}^{\alpha}\left[\mathrm{e}^{jkx}\right] = \frac{c\mathrm{e}^{-ja/2}}{\sqrt{\cos a}}\exp\left(\frac{j}{2}\tan a(f^2+k^2) + jkf\sec a\right)$$

Βιβλιογραφία

[1] Θεόδωρος Αλεξόπουλος, "Εισαγωγή στην Ανάλυση Σήματος", Εκδόσεις Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.

[2] Θεόδωρος Αλεξόπουλος, "Σήματα και Συστήματα (Προβλήματα)", Εκδόσεις Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.

[3] Kenneth S. Miller, "An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations", New York University 1993.

[4] Rajiv Saxena,Kulbir Singh, "Fractional Fourier Transform: A Novel Tool for Signal Processing", Received: April 27, 2004.

[5] M. Alper Kutay,Haldum M. Ozaktas, " M. Alper Kutay,Haldum M. Ozaktas The Fractional Fourier Transform and Harmonic Oscillation", Received: March 6, 2001.

[6] A. Bultheel,H. Martnez-Sulbaran, "Recent Developments in the Theory of the Fractional Fourier and linear canonical Transforms", Received: June 16, 2004.

[7] Jiahhong, "On some Quantum and Analytical Properties of Fractional Fourier Transform", Received: 2002.

[8] Soo-Chag Pei,Chien-Cheng Tseng,Min-Hung Yeh,Ding Jian-Jiun, "A New Definition of Continuous Fractional Hartley Transform", Received: 1998.

[9] Tatiana Alieva,Martin J. Bastiaans, "Fractional Cosine and Sine Transforms in Reletion to the Fractional Fourier and Hartley Transforms", Received: 2002.

[10] Wolfram MathWorld, "mathworld.wolfram.com."